

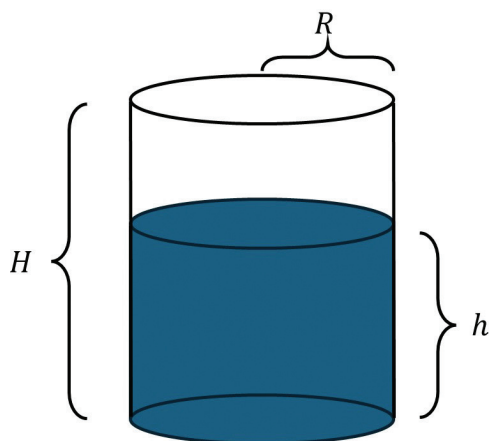
Afkøling af vand – gælder Newtons afkølingslov?

NIELS ERIK WEGGE, Birkerød Gymnasium, nw@birke-gym.dk

Hverdagsfænomenet “afkøling af vand” lyder måske ikke særligt ophidsende, men kan alligevel give anledning til interessante fysikovervejelser og –undersøgelser. Jeg beskriver her to forsøg, som vi har brugt til landsfinalen af Den Danske Fysikolympiade, og som nok også kunne bruges i den almindelige gymnasieundervisning. Det ene ser på afkølingshastigheden af forskellige mængder vand ved en bestemt, fast temperatur. Det andet prøver at forstå hele temperaturkurven for et (næsten) fast volumen vand ved at holde styr på fordampningen undervejs. Teorien bag det første forsøg bygger på Newtons afkølingslov, og data fra det andet forsøg bekræfter direkte gyldigheden af selvsamme afkølingslov – i hvert fald når temperaturforskellen i forhold til omgivelserne er moderat. Ved større temperaturforskelle får vi selvfølgelig brug for Stefan–Boltzmanns lov.

1. Afkølingshastighed ved en bestemt temperatur

Vi betragter et cylindrisk glasbæger af højde H og radius R , som står på et varmeisolerende underlag, og som er fyldt med vand til højde h (fig. 1). Vi vil interessere os for, hvor hurtigt vandet køler af ved forskellige påfyldningshøjder, samt hvad den øjeblikkelige afkølingshastighed $\left|\frac{dT}{dt}\right|$ afhænger af. Man ser straks, at der må være to modsatrettede tendenser: en større vandmængde er alt andet lige længere om at køle af – men en større vandmængde har også større afkølingsoverflade og køler derfor hurtigere af. Hvilken af de to tendenser vinder? Vi må udlede en formel!



Figur 1

Cylindrisk glasbæger af højde H og radius R . Bægeret er fyldt med vand (markeret med blå farve) til højde $h < H$.

Når vandets temperatur T er større end omgivelsernes temperatur T_o , vil vandet tabe energi gennem den fri overflade foroven (areal $A_1 = \pi R^2$) og gennem de lodrette sider af de varme dele af glasset (areal $A_2 = 2\pi Rh$). Vi tillader os at antage,

at der ikke tabes energi gennem bunden af glasset eller fra de knap så varme dele af glasset der ligger over vandoverfladen. Effekten P af den del af varmetabet, som ikke skyldes fordampning, kan med tilnærmelse beregnes med Newtons afkølingslov

$$P_{\text{Newton}} = (\alpha_1 + \alpha_2)(T - T_o)$$

hvor konstanterne α_1 og α_2 er proportionale med hhv. A_1 og A_2 . Vi kan derfor skrive

$$P_{\text{Newton}} = (\beta_1 R^2 + \beta_2 Rh)(T - T_o)$$

hvor de nye konstanter β_1 og β_2 kun afhænger af overfladernes beskaffenhed.

Der vil imidlertid også tabes en betydelig mængde energi fra den fri overflade A_1 pga. fordampning. Dette bidrag er proportionalt med A_1 (altså med R^2), men afhænger i høj grad af temperaturen. I det følgende betragter vi derfor en bestemt, fast temperatur af vandet, T_1 , og så kan konstanten $T_1 - T_o$ bekvemt indgå i to nye konstanter γ_1 og γ_2 :

$$P = \gamma_1 R^2 + \gamma_2 Rh \quad (1)$$

Vi understreger, at (1) inkluderer både ”Newton–afkøling” og ”fordampningsafkøling”, men kun gælder ved en bestemt, fast temperatur.

Den samlede afkølingseffekt P kan også udtrykkes ved den specifikke varmekapacitet c_v af vand (vi ser bort fra glasset):

$$P = mc_v \left| \frac{dT}{dt} \right| \quad (2)$$

Udnyttes at R er fast, mens h er proportional med den påfyldte vandmasse m , kan (1) og (2) kombineres til

$$\left| \frac{dT}{dt} \right| = k_1 \cdot \frac{1}{m} + k_2 \quad (3)$$

Vi kan altså konkludere, at afkølingen ved den faste temperatur T_1 sker langsommere, jo højere vandet står i bægeret, på trods af forøgelsen af afkølingsoverfladen. Det kan være en sund øvelse for ens elever at regne de mange proportionaliteter igennem og derved udtrykke de positive konstanter k_1 og k_2 ved konstanterne α_1 , α_2 , R , c_v , T_o , T_1 samt vandets densitet d_v . Hvis man vil medtage den varme del af glasset i modellen, får man også brug for glassets specifikke varmekapacitet c_g , densitet d_g og godstykkelse b .

Jeg har brugt den simple forsøgsopstilling i fig. 2 til at måle afkølingshastigheden ved 60 °C for ni vandmængder mellem 50 g og 200 g, og er glad for at kunne rapportere, at data me-

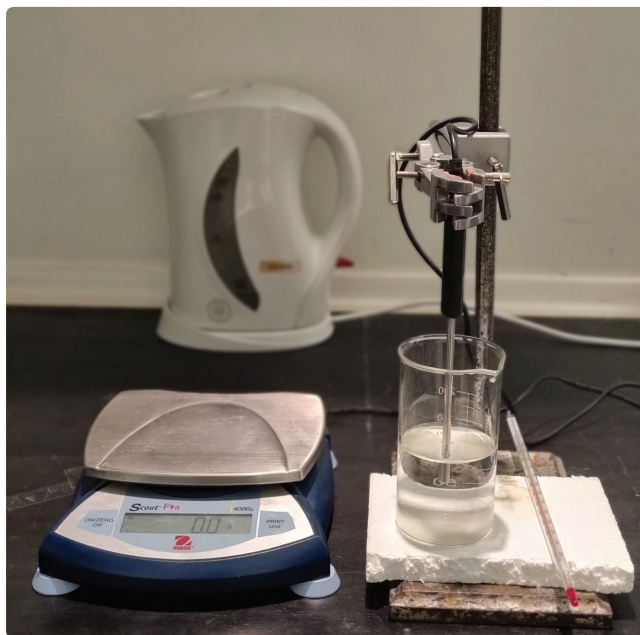
get smukt følger den i (3) forudsagte lineære sammenhæng mellem $\left|\frac{dT}{dt}\right|$ og den reciprokke masse $\frac{1}{m}$: se fig. 4.

Da (3) er udledt på baggrund af Newtons afkølingslov, har vi hermed indirekte fået bekræftet gyldigheden af denne.

Hvis man gerne vil kende sin opstillings α_1 - og α_2 -værdier, kan man beregne dem udfra datagrafens lineariseringskonstanter k_1 og k_2 .

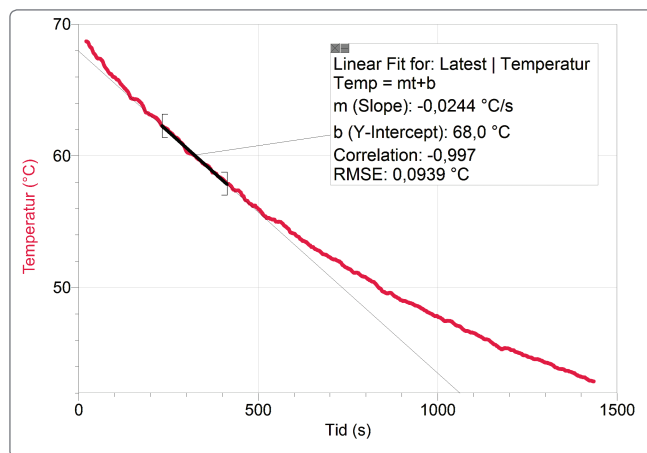
Figur 2

Temperaturudviklingen for vandet måles med et LoggerPro-termometer, mens omgivelsernes temperatur monitoreres med et almindeligt termometer. Vægten bruges til at veje de forskellige vandmængder, der undersøges. Opstillingen skal stå i et lukket lokale uden træk – ellers bliver afkølingen ujævn og afkølingshastighederne upræcise.



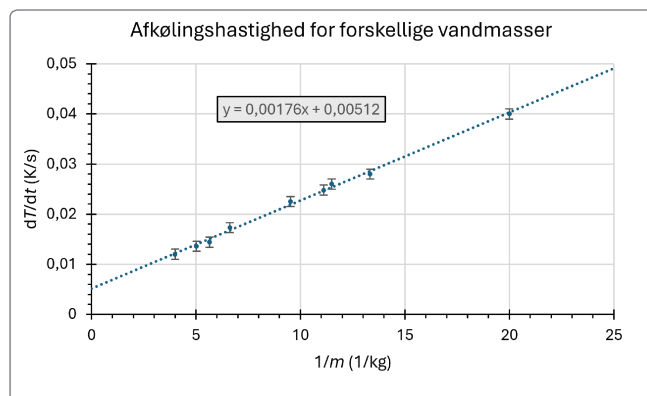
Figur 3

Afkølingskurve for 90 g vand i bægerglasset fra fig. 2. Vandet køler langsommere og langsommere, efterhånden som dets temperatur T nærmer sig omgivelsernes temperatur T_0 . Kurven er ikke helt glat, så jeg har valgt et relativt stort, symmetrisk interval omkring den udvalgte temperatur $T_1 = 60^\circ$ til at bestemme afkølingshastigheden $\left|\frac{dT}{dt}\right| = 0,0244 \text{ K s}^{-1}$.



Figur 4

Afkølingshastigheden afhænger lineært af den reciprokke vandmasse, jf. (3), og y-skæringen er positiv som forventet. Modellens konstanter er $k_1 = 0,00176 \text{ K kg s}^{-1}$ og $k_2 = 0,00512 \text{ K s}^{-1}$.



2. Afkølingskurve for vand – nu med fordampning

Ovenstående teori var let at opstille, fordi vi ved at fokusere på en fast temperatur kunne eliminere fordampningstabets temperaturafhængighed. At fordampningen spiller en komplicerende rolle fremgår af fig. 5. Her har jeg forsøgt at fitte langtidsafkølingen af vand i et fyldt bægerglas med den eksponentielle model $T(t) = a \exp(-bt) + T_o$, der følger af Newtons afkølingslov, og det går helt galt. Fig. 5 viser, at afkølingen går alt for hurtigt i starten, og det er selvfølgelig fordi fordampningen bidrager til afkølingen ud over hvad Newton tilsiger – et bidrag der er særligt stort ved høje temperaturer. Vandets afkølingshastighed fås ved numerisk differentiation af temperaturgrafen og er vist i fig. 6. Igen ser vi, at afkølingshastigheden er meget stor i starten men hurtigt falder, når vandet køler lidt af.

For at komme videre, må vi skille de to bidrag til afkølingen ad, og det kan vi ved samtidigt at måle både temperatur og masse af vandet (fig. 5 og fig. 7). Ved numerisk differentiation af massegrafen kan vi finde den effekt P_{evap} , hvormed der fjernes varme fra systemet pga. fordampning:

$$P_{\text{evap}} = L(T) \left| \frac{dm}{dt} \right|$$

Her er $L(T)$ vandets specifikke fordampningsvarme ved den pågældende temperatur T . Man kan skaffe sig en funktionsforskrift for $L(T)$ ved at lave regression over en tabel med vands L -værdier ved forskellige temperaturer (det gjorde jeg). Herefter kan den del af afkølingshastigheden, der kan henføres til fordampning, beregnes ud fra varmelæreformlen

$$P = \frac{dQ}{dt} = mc \frac{dT}{dt}$$

Det giver

$$\left| \frac{dT}{dt} \right|_{\text{evap}} = \frac{P_{\text{evap}}}{mc} = \frac{L(T)}{mc} \cdot \left| \frac{dm}{dt} \right| \quad (3)$$

Denne formel er rent empirisk – jeg tror ikke, der findes nogen teoretisk formel for $\frac{dm}{dt}$ eller for $L(T)$.

Figur 8 viser forløbet af de to bidrag til afkølingshastigheden. Man ser bl.a. at fordampningen står for omkring halvdelen (!) af afkølingen i de første ca. 1000 s.

Figur 5

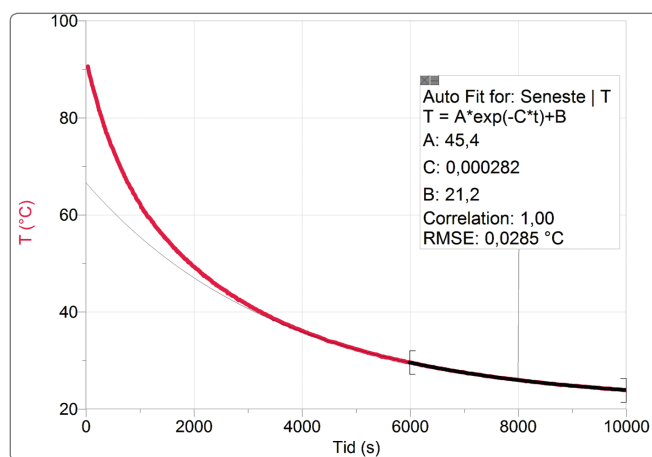
Afkøling af 295 g vand i et helt fyldt bægerglas henover 2,8 timer. Temperaturen beskrives fint med en eksponentiel model, når temperaturen ikke er for høj. Ved høje temperaturer går afkølingen stærkere pga. kraftigere fordampning. Bemærk modellens asymptotiske værdi $B = 21,2^\circ\text{C}$. Den betyder at vandet efter meget lang tid vil stabilisere sig på $T_o = 21,2^\circ\text{C}$. Denne temperatur vil være lidt under omgivelsernes temperatur T_o , sådan at den fortsatte fordampning kan opretholdes.

Bemærk at graferne i fig. 8 ikke bygger på Newtons afkølingslov. Den blå graf er ren empiri, den orange er beregnet ud fra målinger i kombination med simpel varmelære (3), og den grønne graf er bare differensen mellem de to første. Da den grønne graf er rensat for den forstyrrende fordampning, burde den iflg. Newton være givet ved

$$\left| \frac{dT}{dt} \right| = \frac{1}{mc} P_{\text{Newton}} = \frac{1}{mc} \alpha (T - T_o)$$

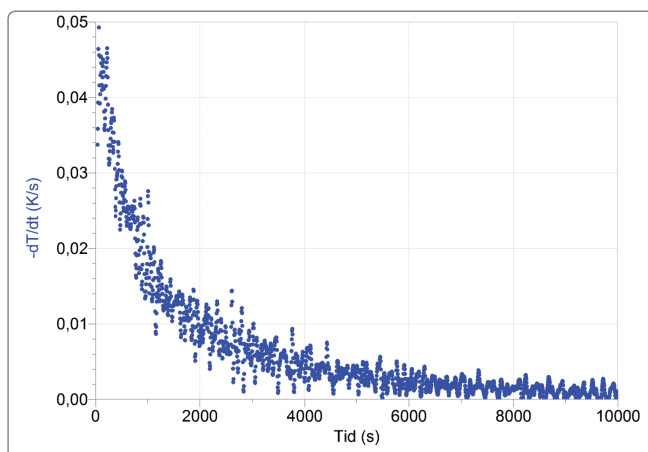
altså en ret linje med x -skæring i omgivelsernes temperatur T_o . Det lineære fit i fig. 9 bekræfter overbevisende Newtons model med $T_o = 23,5^\circ\text{C}$, hvilket netop var stuetemperaturen, da jeg udførte forsøget. Så Newton har ret, når han siger, at effekten af afkølingseffekten af et legeme er proportional med differensen mellem legemets og omgivelsernes temperatur, blot der ikke er fordampning på spil. I hvert fald ved de relativt små temperaturforskelle der er undersøgt her.

Som en afsluttende pointe vil jeg pege på det (måske) overraskende faktum, at vand der står i en åben beholder og får lov at passe sig selv, vil ende med at være lidt koldere end omgivelserne. Varmt vand bliver koldere og koldere indtil det når omgivelsernes temperatur, og her stopper Newton-afkølingen – men der vil jo stadig fordampe noget vand fra den frie overflade, og dermed afkøles vandet yderligere, ned under omgivelsernes temperatur. Dermed vender energistrømmen, og omgivelserne begynder så småt at tilføre energi til vandet. Efter meget lang tid opstår der en ligevægt ved den temperatur $T_\infty < T_o$, hvor der tilføres lige så meget energi fra omgivelserne som der tabes gennem fordampning. I det beskrevne forsøg er T_∞ eksperimentelt bestemt til $21,2^\circ\text{C}$ (ekstrapolation af grafen fig. 5), hvilket er omkring to grader under stuetemperaturen, som iflg. fig. 9 var $T_o = 23,5^\circ\text{C}$. Jeg var bare ikke tålmodig nok til at vente yderligere adskillige timer på at ligevægten skulle indstille sig.



Figur 6

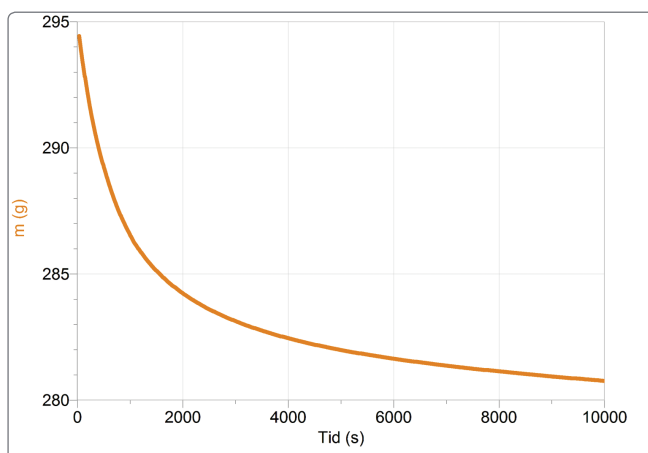
Afkølingshastigheden $\left| \frac{dT}{dt} \right|$ for vandet aftager drastisk i starten, mens temperaturen er høj. Det skyldes, at forskellen $T - T_0$ er stor, men også – og især – at der er stor fordampning ved høje temperaturer. Kurven er konstrueret ved numerisk differentiation af temperaturmålingerne i fig. 5 og er derfor noget ujævn.



Figur 7

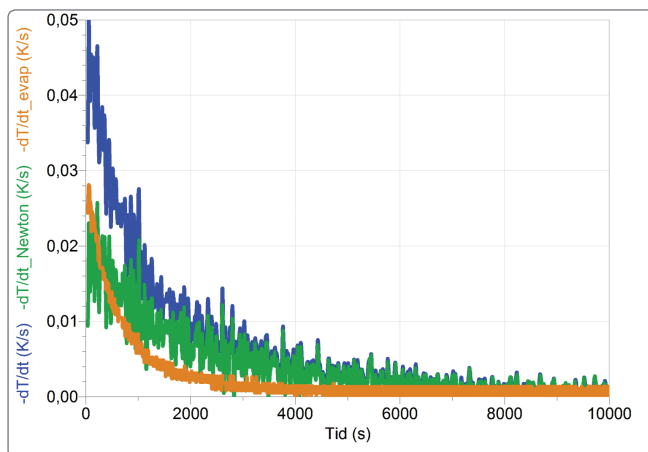
Massen af vandet som funktion af tiden.

Der fordampes ca. 14 g vand i løbet de 2,8 timer; forsøget varer. Fordampningen går særligt hurtigt i starten, hvor vandet er meget varmt. Fordampningen vil fortsætte også efter vandet har opnået sin ligevægtstemperatur T_∞ , så kurven vil have en skrå asymptote.



Figur 8

Blå graf viser den observerede fordampningshastighed (svarende til fig. 6). Orange graf er den del af fordampningshastigheden, der kan henføres til fordampning. Den er beregnet ud fra massegrafen fig. 7 og modellen (3). Grøn graf er forskellen, altså blå graf minus orange graf. Bemærk, at fordampningen står for omkring halvdelen af afkølingen i de første ca. 1000 s. Graferne er glattet ud, men den blå og grønne (som er baseret på temperaturmålingerne) fremstår alligevel ret urolige. Jeg havde skærmet min forsøgsopstilling, men kunne altså ikke helt undgå fluktuationer i temperaturen.



Figur 9

Fordampningshastighederne fra fig. 8, nu som funktion af temperaturen. Tidsudviklingen af data er altså fra højre til venstre. Bemærk at fordampningshastigheden afhænger lineært af temperaturen, når der er korrigeret for fordampning (grøn graf) – præcis som forventet af Newtons afkølingslov. Bemærk også, at x-skæringen ved $\left| \frac{dT}{dt} \right| = 0$ viser, at omgivelsernes temperatur er $T_0 = 23,5^\circ\text{C}$. Det skal sammenholdes med den asymptotiske værdi $T_\infty = 21,2^\circ\text{C}$ fra fig. 5.

