

Kvadratisk dæmpet svingning

SØREN KJÆR SØRENSEN, Viborg Gymnasium og HF

Hvis en svingende fjeder er kvadratisk dæmpet, er Newtons 2. lov for bevægelsen:

$$m \cdot x'' = -k \cdot x - \gamma \cdot x' \cdot |x'|$$

Men kan man ved at måle på bevægelsen erkende, at den netop er kvadratisk dæmpet, og bestemme en værdi for γ ?

I Nayfeh & Mook (1979) er gennemregnet hvordan differential ligningen løses under antagelse af svag dæmpning. De kommer frem til, at

$$x(t) = \frac{1}{\frac{4\gamma}{3m} \cdot \frac{\omega_0}{\pi} + \frac{1}{a_0}} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) + O\left(\frac{\gamma}{m}\right)$$

hvor $\omega_0^2 = k/m$. Jeg vil vise, at uden antagelsen om svag dæmpning, kan man stadig komme frem til, at

$$\frac{1}{|A_n|} \approx \frac{4\gamma}{3m} \cdot n + \frac{1}{|A_0|}$$

hvor A_n er det n 'te maksimale udsving. Udtrykket ses at være konsistent med Nayfeh & Mook's. Og så vil jeg undersøge, om svingninger dæmpet i luft og vand kan beskrives med dette udtryk.

Faserumsbeskrivelse

Det kan vises, at i faserummet opfylder den del af bevægelsen, hvor $x' > 0$, at funktionen $S^+(x, v)$ er konstant, hvor

$$S^+(x, v) = e^{\frac{2\gamma}{m} \cdot x} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{k \cdot m}{2\gamma} \cdot \left(x - \frac{m}{2\gamma} \right) \right)$$

og tilsvarende for $x' < 0$ er $S^-(x, v)$ konstant, hvor

$$S^-(x, v) = e^{-\frac{2\gamma}{m} \cdot x} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{k \cdot m}{2\gamma} \cdot \left(x + \frac{m}{2\gamma} \right) \right)$$

Jeg gennemgår en udledning af disse udtryk til sidst i artiklen. Startes bevægelsen ved at trække fjederen ned og slippe, dvs. med $x(0) = A_0 < 0$ og $x'(0) = 0$, vil $x' > 0$ i den første del af bevægelsen, dvs. vi skal anvende S^+ . Hvis A_1 er udsvinget, hvor bevægelsen vender, altså hvor $v = 0$ igen, så har vi da S^+ er konstant:

$$S^+(A_0, 0) = S^+(A_1, 0) \Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{2\gamma}{m} \cdot A_0} \cdot \frac{k \cdot m}{2\gamma} \cdot \left(A_0 - \frac{m}{2\gamma} \right) = e^{\frac{2\gamma}{m} \cdot A_1} \cdot \frac{k \cdot m}{2\gamma} \cdot \left(A_1 - \frac{m}{2\gamma} \right)$$

Forkortes, hvad forkortes kan, ender vi med den eksakte sammenhæng:

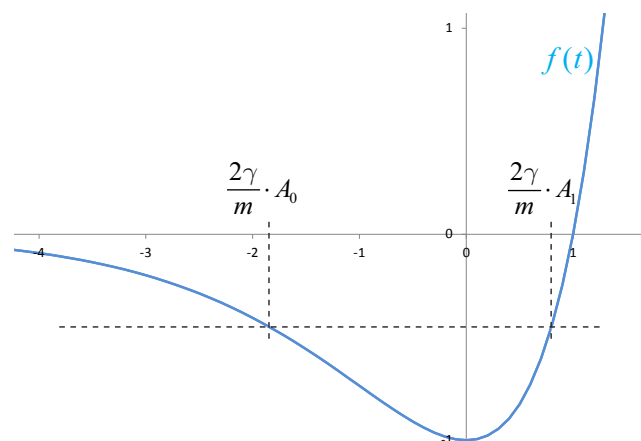
$$e^{\frac{2\gamma}{m} \cdot A_0} \cdot \left(\frac{2\gamma}{m} \cdot A_0 - 1 \right) = e^{\frac{2\gamma}{m} \cdot A_1} \cdot \left(\frac{2\gamma}{m} \cdot A_1 - 1 \right) \quad (1)$$

Bestemmelse af dæmpningen

Jeg er interesseret i at finde en metode til at estimere γ , dvs. løse ligning (1) for γ . Ud fra ligningen ses, at den kan formuleres som

$$f\left(\frac{2\gamma}{m} \cdot A_0\right) = f\left(\frac{2\gamma}{m} \cdot A_1\right)$$

hvor $f(t) = e^t \cdot (t - 1)$. Det ses umiddelbart, at $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.



Her giver A_0 det negative skæringspunkt med en vandret linje, mens A_1 giver det positive. Det ses lidt overraskende, at uanset hvor langt til venstre vi starter med A_0 , så er der en øvre grænse for A_1 , da

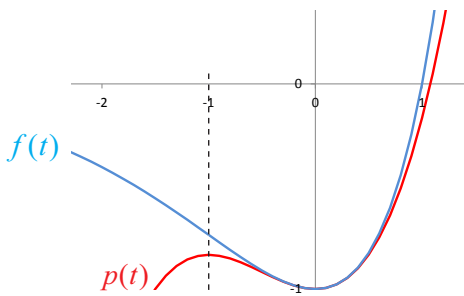
$$\frac{2\gamma}{m} \cdot A_1 < 1 \Leftrightarrow A_1 < \frac{m}{2\gamma}$$

og det er åbenbart ligegyldigt, hvor kraftig fjederen er – det siger noget om hvor voldsom den kvadratiske dæmpning er for høje hastigheder.

For at komme nærmere et udtryk for γ , erstattes $f(t)$ med sit 3. grads Taylorpolynomium i $t = 0$

$$p(t) = \frac{1}{6} (2t^3 + 3t^2 - 6)$$

som approksimerer $f(t)$ ganske pænt i området $-1 < t < 1$, der er relevant for bevægelsen.



Det giver ligningen

$$2\left(\frac{2\gamma}{m} \cdot A_0\right)^3 + 3\left(\frac{2\gamma}{m} \cdot A_0\right)^2 - 6 = 2\left(\frac{2\gamma}{m} \cdot A_1\right)^3 + 3\left(\frac{2\gamma}{m} \cdot A_1\right)^2 - 6$$

der kan reduceres, forkortes med $A_0 - A_1$ og formuleres som

$$\frac{4\gamma}{3m} = \frac{A_0 + A_1}{A_0 \cdot A_1 - (A_0 + A_1)^2}$$

Da A_0 og A_1 har forskelligt fortegn er $(A_0 + A_1)^2$ formodentligt numerisk mindre end $A_0 \cdot A_1$ og smides derfor væk. Tages højde for at A_0 er negativ og A_1 er positiv, giver det, at

$$\frac{4\gamma}{3m} = \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_0} \Leftrightarrow \frac{1}{|A_1|} = \frac{4\gamma}{3m} + \frac{1}{|A_0|}$$

I A_1 vender bevægelsen, dvs. $x' < 0$ og vi skal anvende $S^-(x, v)$ til at finde A_2 , hvor bevægelsen vender igen. Tages højde for, at A_2 vil være negativ, finder man samme sammenhæng som før, dvs. vi kan tillade os at skrive, at

$$\frac{1}{|A_{n+1}|} = \frac{4\gamma}{3m} + \frac{1}{|A_n|} \quad (2)$$

hvor A_n er det maksimale n 'te udsving fra ligevægt. Anvendes ligningen successivt finder vi, at

$$\frac{1}{|A_n|} = \frac{4\gamma}{3m} \cdot n + \frac{1}{|A_0|}$$

dvs. $1/|A_n|$ må forventes at vokse lineært som funktion af n .

Vurdering af approksimationerne

For at vurdere, i hvilket område den approksimative sammenhæng (2) kan forventes at holde, skiftes til den dimensionsløse størrelse

$$t_n = A_n \cdot \frac{2\gamma}{m}$$

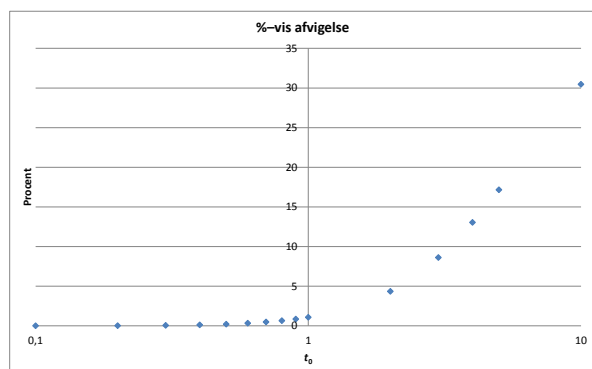
Den eksakte sammenhæng er, at

$$f(t_0) = f(t_1) \quad (3)$$

og med approksimationerne forventes, at

$$\frac{1}{|t_1|} - \frac{1}{|t_0|} = \frac{2}{3}$$

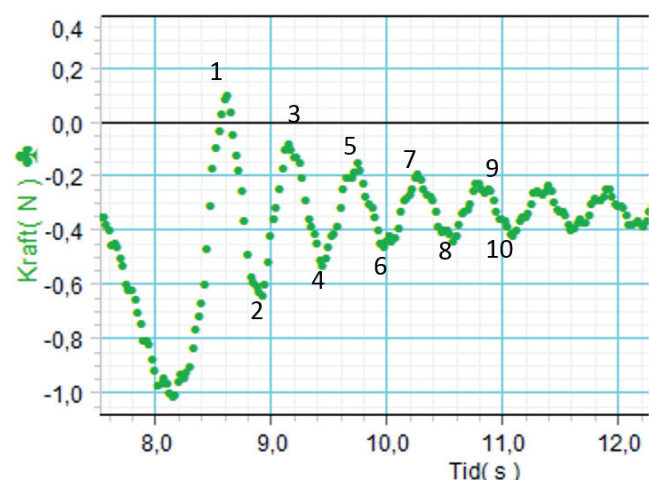
For forskellige valg af t_0 kan de to ligninger løses for t_1 , og betragtes den %-vise afvigelse mellem den approksimative og den eksakte værdi, fås



Alle udsving på nær det første vil opfylde at $|t_n| < 1$, så muligvis på nær det første udsving vil den procentvise afvigelse mellem den approksimative og eksakte løsning være under 1%. Den approksimative løsning kan altså med stor nøjagtighed bruges på stort set hele bevægelsen.

Målinger

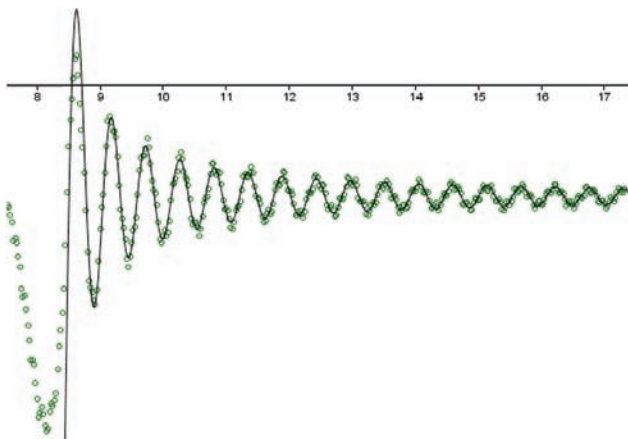
En fjeder hænges i en kraftmåler, der nulstilles. Fjederen belastes med en skive med en diameter på ca. 20 cm. Systemet sættes i svingninger ved at presse skiven ned og slippe.



Spørgsmålet er nu, om det er en kvadratisk dæmpet svingning, og i givet fald hvilken værdi vi skal give γ .

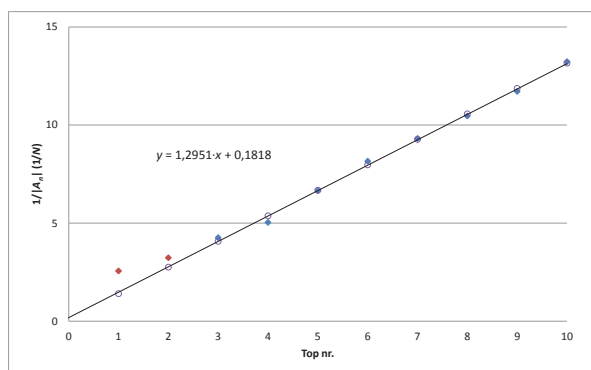
Forsøger man at bestemme γ via regression på en funktion af Nayfeh & Mook's type, finder man værdier for γ/m mellem

0,82 1/N og 0,95 1/N alt efter hvilke data, der udvælges til regressionen. Anvendes alle data fra top 3 og frem finder man $\gamma/m=0,92$ 1/N, og på nær det første toppunkt ses regressionskurven at følge data pænt:



For at udnytte den approksimative sammenhæng aflæses i stedet punkter med maksimal udsving ved at fitte et andengradspolynomium i en omegn af hvert toppunkt, se tabel nedenfor.

Fjederens ligevægtsposition aflæses i starten af målingerne til $-0,332$ N. Plottes $1/|A_n|$ som funktion af top-nummeret forventes en lineær sammenhæng:



Kvadraterne er de målte punkter. De første 2 punkter afviger fra den forventede linearitet, og de er derfor ikke medtaget i regressionen. De åbne cirkler er forventede værdier beregnet

iterativt via numerisk løsning af den eksakte ligning (1) med udgangspunkt i regressionens værdi for top nr. 3.

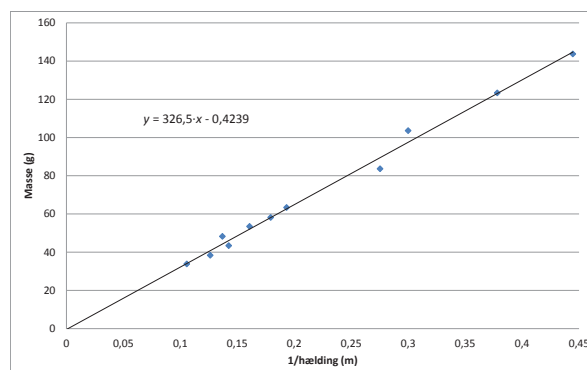
Det ses, at alle de eksakte værdier følger regressionslinjen pænt, så de første 2 målinger afviger altså fra det forventede på baggrund af den eksakte teori, og ikke kun fra den approksimative sammenhæng. Det kan skyldes, at teorien ikke holder for store udsving, eller det kan skyldes en form for indsvingning i systemet.

Hældningen af regressionslinjen giver en værdi for γ/m på 0,97 1/N – altså i den høje ende af resultaterne af regression på Nayfeh & Mook's udtryk, men det gør ingen synlig forskel på grafen for Nayfeh & Mook's udtryk at anvende den høje værdi for γ/m .

Gentages målingerne med samme skive, men hvor massen øges med lodder, fås den nederste tabel. Kigger vi på den forventede sammenhæng, finder vi:

$$\text{hældning} = \frac{4\gamma}{3m} \Leftrightarrow m = \frac{4}{3} \gamma \cdot \frac{1}{\text{hældning}}$$

hvor x-aksen er omregnet fra kraft til afstand via fjederkonstanten på 7,31 N/m.



Sammenhængen er overraskende pæn – i svingende systemer er der normalt en nulpunktfejl, der skyldes, at man skal lægge 1/3 af fjedermassen til, som for den anvendte fjeder svarer til

Top	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t/s	8,61	8,89	9,18	9,45	9,73	10	10,3	10,5	10,8	11,1
F/N	0,0588	-0,642	-0,0972	-0,531	-0,182	-0,455	-0,225	-0,428	-0,247	-0,408

Masse (g)	33,8	38,3	43,4	48,3	53,5	58,1	63,3	83,6	103,6	123,3
Hældning (1/N)	1,3	1,08	0,96	0,999	0,851	0,763	0,708	0,497	0,456	0,362

22,3g. Via hældningen af regressionslinjen kan γ bestemmes:

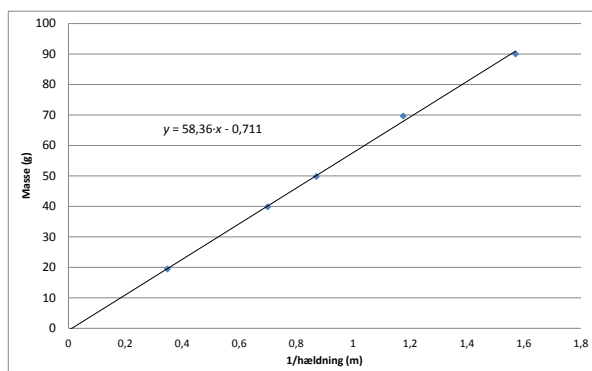
$$\frac{4}{3}\gamma = 327 \frac{\text{g}}{\text{m}} \Leftrightarrow \gamma = 245 \frac{\text{g}}{\text{m}}$$

Værdien kan vurderes ved at sammenholde med det sædvanlige udtryk $\gamma = 1/2 \cdot A \cdot c_w \cdot \rho$. I følge *Databogen* har en cirkulær skive en c_w -værdi på 1,1 dvs.

$$\frac{1}{2} \cdot A \cdot c_w \cdot \rho = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (10 \text{ cm})^2 \cdot 1,1 \cdot 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 21 \frac{\text{g}}{\text{m}}$$

Den målte værdi for γ er altså en faktor 12 højere end umiddelbart forventet. Det kan muligvis skyldes, at c_w afhænger af hastigheden, med stigende c_w for faldende hastigheder i følge Orbit 3. En anden mulighed er, at skiven sætter den omkringliggende luft i bevægelse, så når skiven skifter retning møder den sin egen ”medvind”, og oplever derved en forøget modstand.

Gentages eksperimentet med en skive med en diameter på ca. 10 cm finder man også en linaritet:



Altså samme billede som før, men nu er

$$\frac{4}{3}\gamma = 58,4 \frac{\text{g}}{\text{m}} \Leftrightarrow \gamma = 44 \frac{\text{g}}{\text{m}}$$

hvilket vil sige at γ nogenlunde følger tværsnitsarealet af skiven, men diameteren er ikke bestemt tilstrækkeligt præcist til at undersøge det nærmere.

I vand fås samme billede, men dæmpningen er som forventet noget kraftigere. Her giver loddet alene anledning til $\gamma=420 \text{ g/m}$.

Diskussion

Kan målingerne så beskrives ved en kvadratisk dæmpning? I alle måleserier falder typisk de(n) første par målinger over den forventede linaritet. Det kan muligvis skyldes indsvingning, da alle målinger er startet fra hvile. Det vil derfor være interessant at gentage forsøget hvor svingningerne startes ved at drive fjederen. Skyldes afvigelsen indsvingning, så burde den forsvinde.

Lineariteterne af de forskellige grafer er meget overbevisende. Godt nok bliver værdien af γ umiddelbart for høj, men den følger tilsyneladende tværsnitsarealet som forventet. Man kan ikke der kan findes en forklaring i at c_w normalt bestemmes ved konstant vindhastighed, mens der her er målt på et svingende system. Her vil det være interessant at prøve med andre fjedre (dvs. andre hastigheder) for at se, om det samme billede tegner sig.

Tilbage står, at både ved dæmpning i luft og vand skal den målte masse tilsyneladende ikke korrigeres med en del af fjedermassen som sædvanligt i forbindelse med målinger af svingningstiden. I skrivende stund er jeg ikke klar over om det udgør et problem.

Udledning af faserumsbeskrivelse

Omskrivningen fra differentialligning til faserumsbeskrivelse findes bl.a. hos Smith (2012). For $x' > 0$ er differentialligningen:

$$m \cdot x'' = -k \cdot x - \gamma \cdot (x')^2 \Leftrightarrow m \cdot x'' + k \cdot x + \gamma \cdot (x')^2 = 0$$

mens for $x' < 0$ skifter fortegnet på γ . Introduceres $v = x'$ og

ganges igennem med $v \cdot e^{\frac{2\gamma}{m} \cdot x}$, finder vi:

$$v \cdot e^{\frac{2\gamma}{m} \cdot x} \cdot (m \cdot v' + k \cdot x + \gamma \cdot v^2) = 0$$

Derved kan vi opfatte differentialligningen som en eksakt form for funktionen $S^+(x, v)$:

$$S^+(x, v) = e^{\frac{2\gamma}{m} \cdot x} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{k \cdot m}{2\gamma} \cdot \left(x - \frac{m}{2\gamma} \right) \right)$$

da man med lidt arbejde kan konstatere, at

$$\frac{dS^+}{dt}(x, v) = 0 \Leftrightarrow v \cdot e^{\frac{2\gamma}{m} \cdot x} \cdot (m \cdot v' + k \cdot x + \gamma \cdot v^2) = 0$$

Værdien af $S^+(x, v)$ er altså konstant, så længe $x' > 0$. En tilsvarende analyse for $x' < 0$ viser, at

$$S^-(x, v) = e^{-\frac{2\gamma}{m} \cdot x} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{k \cdot m}{2\gamma} \cdot \left(x + \frac{m}{2\gamma} \right) \right)$$

er konstant, så længe $x' < 0$.

Litteratur

A. H. Nayfeh & D. Mook, *Nonlinear Oscillations*, Wiley, New York, 1979, side 119–125.

B.R Smith, *The Quadratically damped oscillator: A case study of a non-linear equation of motion*, Am. J. Phys. 80, 816 (2012).

M. Brydensholt et.al., *Orbit 3*, 3. udgave, Systime 2004.