

Konisk pendul – en målemæssig udfordring

NIELS ERIK WEGGE, IVÁN S. PASARÍN, Birkerød Gymnasium

Efter at nogle af vores IB-elever (IB = *International Baccalaureate*) havde undersøgt det simple pendul, som jo ved små udslagsvinkler i et fast plan svinger med letefterviselig periode

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

syntes vi det ville være en sjov udfordring for dem at måle på det koniske pendul.

Hvordan afhænger det koniske penduls periode af vinklen med lodret?

Vi havde lige haft om jævn cirkelbevægelse, så teorien var let at stille op:

Ved opløsning af snorkraften S og tyngdekraften $m \cdot g$ efter lodret (Figur 3) ses, at

$$S \cos(\theta) = mg$$

så den til cirkelbevægelsen nødvendige centripetalkraft kan udtrykkes som

$$F_c = S \sin(\theta) = mg \tan(\theta)$$

Da jo

$$F_c = m \frac{v^2}{R}$$

hvor v og R er hhv. fart og radius i cirkelbevægelsen, fås

$$\frac{v^2}{R} = g \tan(\theta)$$

som ved indsættelse af

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

bliver til

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R}{g \tan(\theta)}$$

Da radius i cirkelbevægelsen kan skrives

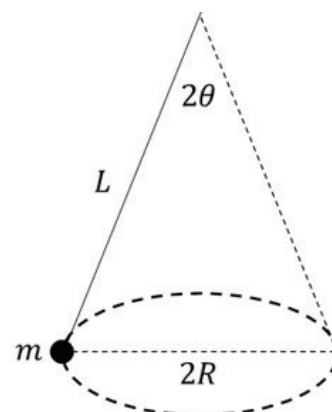
$$R = L \sin(\theta)$$

fås endelig formelen for det koniske penduls periode:

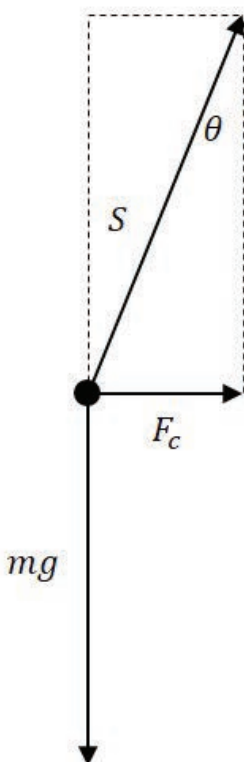
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g} \cos(\theta)} \quad (1)$$



Figur 1
Helene (IB-elev på Birkerød Gymnasium) svinger med et konisk pendul foran en motionsensor.



Figur 2
Et konisk pendul med snorlængde L udfører en jævn, horisontal cirkelbevægelse med radius R og vinklen θ i forhold til lodret.



Figur 3
Kræfternes trigonometri: Centripetalkraften er vektorsummen af tyngdekraft og snorkraft.

Perioden for det koniske pendul forventes altså at aftage, når vinklen øges, og i et $(\sqrt{\cos(\theta)}, T)$ -plot af måledata skulle vi se en ret linje gennem $(0, 0)$ med hældningskoefficient

$$2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Vi noterer i forbifarten grænsetilfældene $\theta = 0^\circ$, hvor (1) giver

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

som forventet for et simpelt pendul, og $\theta = 90^\circ$, hvor $T = 0$ (pendulet må svinge uendeligt hurtigt for at komme op i 90°).

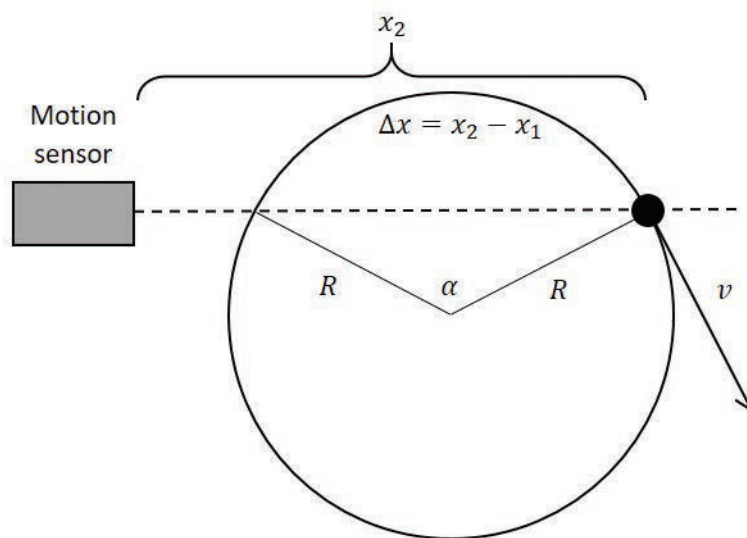
Metode

Vi lod eleverne svinge med et håndholdt pendul (Figur 1), hvilket gjorde det meget let at variere θ . Perioden er nem at måle præcist, men vinklen ikke så lige til. Eleverne overvejede at filme bevægelsen oppefra og efterfølgende nøjsommeligt bestemme θ ved opmåling i en videoana-

lyse. Vi overtalte dem dog til at bruge en motionsensor koblet til LoggerPro: lod-det passerer motionssensorens ultralydskegle to gange for hvert omløb, og hvis man er så heldig, at passagerne svarer til en diameter i cirklen, kan radius (og dermed vinklen) jo umiddelbart bestemmes. Så heldig er man bare ikke, viste det sig! Og pludselig udviklede vinkelbestemmelsen sig til en større matematikopgave.

Figur 4

Det koniske penduls bane set oppefra. Pendulet har lige krydset ultralydstrålen fra motionssensoren, som har målt afstanden x_2 . Korden i cirklen bestemmes som differensen mellem de to målte passageafstande: $\Delta x = x_2 - x_1$.



Bestemmelse af det koniske penduls vinkel

Som vist på Figur 4 vil motionssensoren bestemme afstanden til det svingende lod to gange for hvert omløb, og herved kan korden Δx i cirklen bestemmes. Derudover giver opmåling af motionssensorens (t, x) -graf også hele omløbstiden T såvel som tiden t ("korde-tiden") fra første passage til anden passage (Figur 5).

Nu er vi endelig parat til at bestemme pendulvinklen θ !

Det er klart fra Figur 2, at

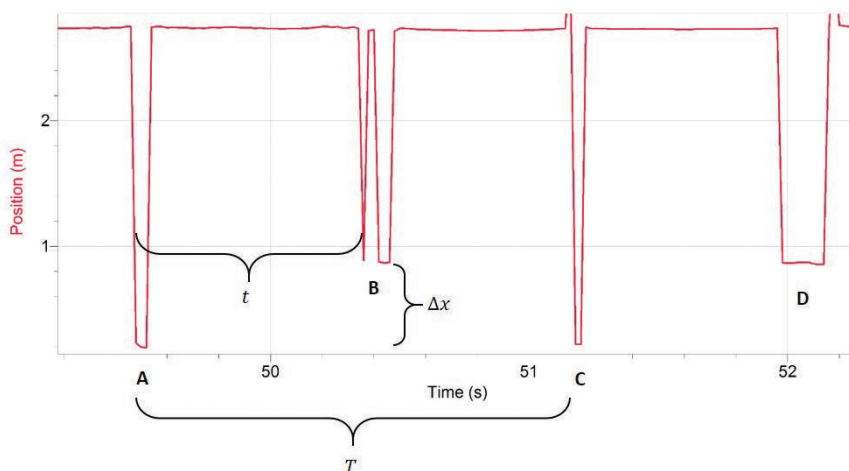
$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{R}{L}\right)$$

så det gælder bare om at trække radius R ud af motionssensor-dataene Δx , t og T fra Figur 5. Det gøres ved hjælp af cosinusrelationen i Figur 4:

$$(\Delta x)^2 = 2R^2(1 - \cos(\alpha))$$

hvor centervinklen α oplagt er brøkdelen t/T af hele cirklen (jævn bevægelse), og derfor kan beregnes ved

$$\alpha = 2\pi \frac{t}{T} \quad (\text{i radianer})$$



Figur 5

To omløb af pendulet observeret af en motionsensor. Pendulet passer tæt forbi sensoren ved A og C. Passagerne B og D er, når loddet er længst væk. Perioden T måles nogenlunde præcist fra kant til kant mellem A og C, mens "korde-tiden" t måles fra A til B. Positionsforskellen Δx mellem A og B udgør korden, jf. Figur 4.

Målinger og analyse

Elevernes målinger blev ikke særligt gode. Det var især svært at få pendulet til at svinge i en ren cirkel, og opmålingen på motionsensorgraferne var heller ikke nem for dem. Vi lavede derfor selv en stribe målinger, (se tabel), som danner basis for analysen i denne artikel.

Måleusikkerheder

Den anførte usikkerhed $0,02 \text{ s} = 1/50 \text{ s}$ på tidsmålingerne i LoggerPro (første to søjler i tabellen) skyldes, at loddets position kun bestemmes 50 gange i sekundet. Denne endelige sample rate giver også en principiel usikkerhed på kordemålingen (søjle 3), men derudover er det også svært dels at vurdere præcis hvor på den uregelmæssige graf, man skal måle for at få Δx . Endelig er det et problem for afstandsmålingen, at loddet passerer sensoren "på skrå" og måske ikke hver gang i samme højde.

Vores elever blev til deres rapport bedt om at udregne den resulterende usikkerhed på $\sqrt{\cos(\theta)}$ (sådanne beregninger er standard på IB), men vi har for overskuelighedens skyld udeladt dem i denne artikel.

Resultat

Som det ses på graferne Figur 6 og 7, er vores måleseries omfang ret snævert – det havde været godt også at have haft betydeligt større θ -værdier, så grafen kunne strække sig længere mod venstre. Alligevel er det tydeligt, at det koniske penduls periode T som forventet er proportional med $\sqrt{\cos(\theta)}$: der er virkelig tale om en ret linje gennem (0, 0).

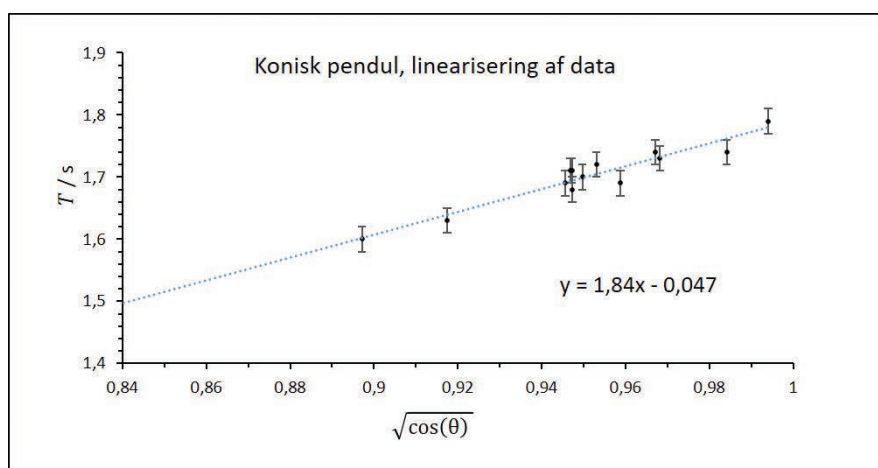
Den teoretisk forventede værdi for hældningen af $(\sqrt{\cos(\theta)}, T)$ -grafen er som nævnt

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

jf. (1), og med vores pendullængde på $L = 0,80 \text{ m}$ fås

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,80 \text{ m}}{9,82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1,79 \text{ s}$$

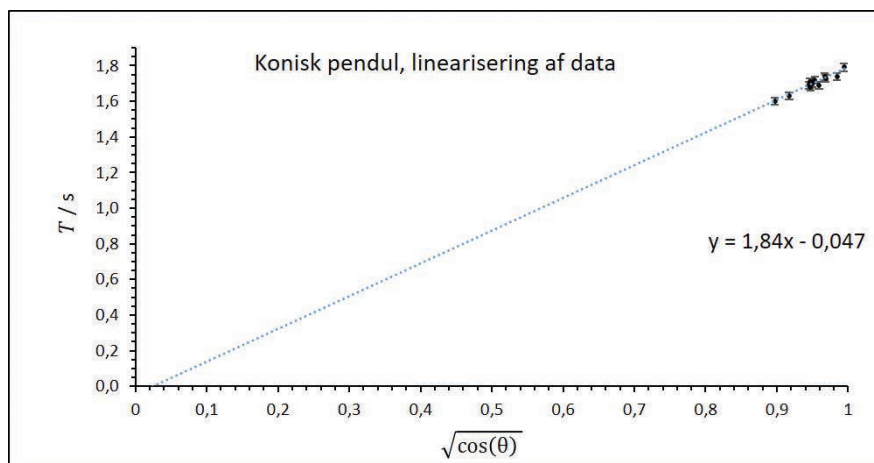
Periode	"korde-tid"	Korde	Radius	Vinkel	Linearisering
T	t	Δx	R	θ	$\sqrt{\cos(\theta)}$
s	s	m	m	grader	
+/- 0,02	+/- 0,02	+/- 0,005			
1,79	1,03	0,239	0,123	8,8	0,994
1,74	0,87	0,398	0,199	14,4	0,984
1,73	1,05	0,526	0,279	20,4	0,968
1,74	0,91	0,565	0,283	20,7	0,967
1,69	0,85	0,630	0,315	23,2	0,959
1,72	0,94	0,662	0,335	24,7	0,953
1,70	0,90	0,688	0,345	25,6	0,950
1,68	0,91	0,700	0,353	26,2	0,947
1,71	0,93	0,700	0,353	26,2	0,947
1,71	0,89	0,707	0,354	26,3	0,947
1,69	0,88	0,715	0,358	26,6	0,946
1,63	0,94	0,839	0,432	32,7	0,917
1,60	0,85	0,945	0,475	36,4	0,897



Figur 6

Målepunkterne ligger pænt på en ret linje inden for T -måleusikkerheden. Skæringen med y -aksen er $T = -0,047 \text{ s}$. Det er tæt på nul, så det koniske penduls periode T er altså proportional med $\sqrt{\cos(\theta)}$.

Denne værdi synes umiddelbart at være i smuk overensstemmelse med den eksperimentelt opnåede proportionalitetskonstant, som jo er 1,84 s. For at udtale sig mere præcist om hvor god overensstemmelsen er, tegner vores IB-elever den stejleste og den mindst stejle rette linje, der passerer gennem (næsten) alle målepunkternes fejlintervaller. Derved fås et usikkerhedsinterval for den eksperimentelt opnåede hældningskoefficient (i vores tilfælde fra ca. 1,6 s til ca. 2,4 s), og teorien anses for bekræftet, hvis den teoretiske værdi ligger inden for usikkerhedsintervallet (det gør den: $1,79 \in [1,6 ; 2,4]$).



Figur 7
Vores måleserie er alt for snæver.

tekniskmuseum.dk

Danmarks Tekniske Museum

GRATIS adgang til LMFK's medlemmer

Undervisningsforløb for gymnasier og skoler bl.a.





- Energikrisen 1973 - Den industrielle revolution - Innovation - Drømmen om at flyve -




Fabriksvej 25 • 3000 Helsingør • Tel. 4922 2611
 skoletjenesten@tekniskmuseum.dk • www.tekniskmuseum.dk
 Børn/unge under 18 år gratis • Åbent: tirsdag - søndag 10-17

Hjemmeside om Niels Bohr og paradigmeskiftet

CLAUS MÜNCHOW, claus@munchow.net

Endnu aktive undervisere kan måske få glæde af teksten, der ligger på nettet

munchow.net/claus/Bohr_og_paradigmeskiftet.htm

Den er til fri afbenyttelse, blot vil jeg gerne orienteres om dens modtagelse og eventuel anvendelse.