

At elektronen så alligevel kan befinde sig tættere end bohr-radius fra protonen, er en anden historie, der som det nok er klart for læseren, kræver en kvantemekanisk beskrivelse af atomet. Denne beskrivelse er kompliceret og efterlades derfor til et senere fysikstudium på universitet. Glæd dig!

Litteratur

James D. Olsen and Kirk T. McDonald, *Classical Lifetime of a Bohr Atom*. Joseph Henry Laboratories, Princeton University, Princeton, NJ 08544. March 7, 2005; Updated May 30, 2017.

Noter

¹⁾ Kaldet den klassiske elektronradius, der dog intet har at gøre med elektronens reelle størrelse, se gabrielse.physics.harvard.edu/gabrielse/overviews/ElectronSubstructure/ElectronSubstructure.html

²⁾ Strengt taget ikke til afstanden 0 men derimod protonradius af størrelse 10^{-15} m.

³⁾ Strålingsudsendelse fra en accelereret ladning tager udgangspunkt i Liénard–Wiechert potentialerne, der indsat i maxwellligningerne giver det elektriske og det magnetiske felt, der udsendes fra ladningen som stråling.

$$^4) \vec{r}(t) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t) \\ \sin(\omega \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} = r \cdot \vec{e}_r.$$

Bohrmodellen og korrespondensprincippet

PETER PANUM KJELDSEN, Rosborg Gymnasium & HF

Introduktion

I det følgende tages udgangspunkt i Bohrs atommodel, og der udledes et udtryk for bohr-radius og rydbergkonstanten ved naturkonstanter i en semi-klassisk model af hydrogenatomet. Udledningen af formelen for rydbergkonstanten hviler på Bohrs korrespondensprincip om overensstemmelse mellem den nye og gamle fysik under passende omstændigheder. Disse omstændigheder er de såkaldte *rydbergtilstande*.

I Maxwells teori er elektrisk ladning kilde til det elektromagnetiske felt. Hvis ladningen udfører en jævn cirkelbevægelse udsendes et periodisk varierende elektromagnetisk felt med en frekvens lig med omløbsfrekvensen. Det elektromagnetiske felt overtager således i klassisk teori ladningens omløbsfrekvens. I Bohrs atommodel er det derimod ikke elektronens kredsen omkring protonen, der giver anledning til lysemission, men kvantespring imellem såkaldte stationære tilstande.

For rydbergtilstande gælder, at omløbsfrekvensen for to nabo-tilstande er næsten ens. Dermed er det udsendte elektromagnetiske felt klassisk veldefineret, ligesom kvanteteorien forudsiger fotonens frekvens for overgangen imellem de to tilstande. Hermed opfylder rydbergtilstande Bohrs korrespondensprincip, og det klassiske og det kvantemekaniske resultat bør være ens ifølge Bohr.

Bohrmodellen og kvantisering af afstande

Fra bohrmodellen er energien af den n 'te tilstand givet ved

$$E_n = -h \cdot c \cdot R \cdot \frac{1}{n^2}$$

hvor R er rydbergkonstanten $R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$, og n er hovedkvantetallet og samtidig banens nummer.

Energien, og dermed frekvensen, af den udsendte foton findes ifølge bohrmodellen som energiforskellen mellem de to kvantetilstande, som elektronen hopper fra og til:

$$E_{\text{foton}} = h \cdot f = E_n - E_m = h \cdot c \cdot R \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Fra klassiske fysik fås, at den mekaniske energi af hydrogenatomet med elektronen i afstand r fra protonen er

$$E_{\text{mek}} = -k_C \cdot \frac{e^2}{2 \cdot r}$$

hvilket i kombination med energiniveauligningen giver et udtryk for radius r :

$$E_{\text{mek}} = E_n \Leftrightarrow -k_C \cdot \frac{e^2}{2 \cdot r} = -h \cdot c \cdot R \cdot \frac{1}{n^2} \cdot r = \frac{k_C \cdot e^2}{2 \cdot h \cdot c \cdot R} \cdot n^2$$

Kvantiseringen af energien medfører således en kvantisering af afstande i hydrogenatomet givet ved ligningen

$$r_n = a_0 \cdot n^2$$

hvor bohradius er lig med

$$a_0 = \frac{k_C \cdot e^2}{2 \cdot h \cdot c \cdot R}$$

Rydbergtilstande og korrespondensprincippet

For baner med store kvantetal og dermed baner i stor afstand fra protonen gælder, at omløbsfrekvenserne er (næsten) ens for nabobaner:

$$\begin{aligned} f_m &= k \cdot \frac{1}{\sqrt{r_m}} \quad \text{og} \quad r_m = a_0 \cdot m^2 \\ f_{m+1} &= k_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{(m+1)^2}} = k_1 \cdot \frac{1}{m+1} \\ &= k_1 \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{m}} \cong f_m \quad \text{for } m \gg 1 \end{aligned}$$

Frekvensen af den udsendte stråling er derfor veldefineret, og klassisk fysik bør kunne anvendes for disse såkaldte rydberg-nabotilstande.

Denne overgang fra det kvantemekaniske til det klassiske område var uhyre vigtigt for Bohr i hans arbejde med atomet. Det er jo uomtvisteligt, at klassisk fysik virker, når den anvendes til at beskrive den verden, vi kan se og bevæge os i.

Omvendt viser atomerne os, at der findes forhold i naturen, der kræver en anden mekanik, hvis teorien skal kunne forklare de eksperimentelle data.

Det interessante er derfor ifølge Bohr at identificere de fænomener i naturen, der ligger på grænsen mellem de to beskrivelser og her undersøge kravet om enslydende resultater – den såkaldte *korrespondens*.

For rydbergtilstande gælder, at fotonenergien for den udsendte foton ved elektronkvantespring fra bane $m + 1$ til bane m er givet ved

$$h \cdot f = h \cdot c \cdot R \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) \cong 2 \cdot h \cdot c \cdot R \cdot \frac{1}{m^3}$$

og vinkelfrekvensen ω af den udsendte stråling er derfor:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 4 \cdot \pi \cdot c \cdot R \cdot \frac{1}{m^3}$$

For elektronen i afstand r_m , er vinkelhastigheden ω i klassisk teori givet ved

$$k_C \cdot \frac{e^2}{r_m^2} = m \cdot \omega^2 \cdot r_m \cdot k_C \cdot \frac{e^2}{m \cdot r_m^3} = \omega^2$$

Indsættes $r_m = a_0 \cdot m^2$ samt udtrykket for bohradius fra tidligere fås

$$\omega = \left(\sqrt{\frac{h^3 \cdot c \cdot R}{2 \cdot \pi^2 \cdot m_0 \cdot k_C^2 \cdot e^4}} \right) \cdot 4 \cdot \pi \cdot c \cdot R \cdot \frac{1}{m^3}$$

Da de to udtryk ifølge korrespondensprincippet bør give samme resultat, må der gælde, at

$$\frac{h^3 \cdot c \cdot R}{2 \cdot \pi^2 \cdot m_0 \cdot k_C^2 \cdot e^4} = 1$$

og hermed findes et udtryk for rydbergkonstanten R ved naturkonstanter:

$$R = \frac{m_0 \cdot k_C^2 \cdot e^4}{4 \cdot \pi \cdot h^3 \cdot c}$$

Da udtrykket for bohradius udledt tidligere indeholder rydbergkonstanten foruden naturkonstanter, kan bohradius ligeledes beregnes ved kun naturkonstanter:

$$a_0 = \frac{k_C \cdot e^2}{2 \cdot h \cdot c \cdot R} = \frac{\hbar^2}{k_C \cdot m_0 \cdot e^2}$$