

# Dopplereffekt

INDERMOHAN SINGH WALIA, Egedal Gymnasium & HF.

I denne artikel vil jeg udlede formlerne for den klassiske og den relativistiske Dopplereffekt. Grundlæggende for behandling af dette emne er to begivenheder, nemlig afsendelse af et signal fra senderen og modtagelse af signalet ved modtageren. Disse begivenheder angives ved tidspunkter i senderens og modtagerens system. Urene i de to systemer synkroniseres således, at når senderen og modtageren befinder sig ved samme position, så viser urene tidspunktet = 0. Tidspunkter angives som " $T$ " i det system, der er hvile og som " $t$ " i det system, der bevæger sig.

## Klassisk Dopplereffekt

### Senderen bevæger sig væk fra modtageren

Lad os først betragte situationen ved den klassiske Dopplereffekt, hvor en sender af lydbølger bevæger sig væk med en fart på  $v$  fra en modtager. Lydbølgens fart i forhold til senderen er  $u$  og vi antager at  $u$  er større end  $v$ . Til tidspunktet  $T = t = 0$  befinder senderen sig ved modtageren og bevæger sig derefter med konstant fart  $v$  radialt væk fra modtageren. Til tidspunktet  $t_s$  på senderens ur udsendes et signal i retning mod modtageren. På modtagerens ur svarer dette tidspunkt til  $T(t_s)$  og senderen befinder sig i afstanden  $x(T(t_s))$  fra modtageren. Tidspunktet når signalet ankommer ved modtageren angives som  $T_m$ , hvor  $T_m > T(t_s)$ . Vi har følgende sammenhæng mellem de to tidspunkter:

$$T(t_s) + \frac{x(T(t_s))}{u - v} = T_m \quad (1)$$

Andet led på venstre side er tidsrummet for signalet at ankomme ved modtageren, idet  $u - v$  er lydbølgens fart i forhold til modtageren. I den klassiske fysik er tidsangivelser identiske for forskellige systemer, og i denne situation har de to systemer samme nulpunkt for tidsmåling. Vi har altså at:

$$T(t_s) = t_s \wedge x(T(t_s)) = v \cdot T(t_s) = v \cdot t_s$$

Indsættes ovenstående i ligning (1) haves følgende:

$$\begin{aligned} t_s + \frac{v \cdot t_s}{u - v} &= T_m \Leftrightarrow t_s \cdot \left(1 + \frac{v}{u - v}\right) = T_m \Leftrightarrow \\ t_s \cdot \left(\frac{u}{u - v}\right) &= T_m \Leftrightarrow \\ t_s &= \frac{u - v}{u} \cdot T_m \end{aligned} \quad (2)$$

Ovenstående angiver sammenhængen mellem sende- og modtagetidspunkterne til signalet. Er lydsignalet med en bestemt frekvens, udsendes bølgetoppene fra senderen med et bestemt tidsrum  $\Delta t_s$  og bølgetoppene modtages ved modtageren også med et bestemt tidsrum  $\Delta T_m$ . Vi ønsker at finde sammen-

hængen mellem disse to tidsintervaller og dermed mellem sendefrekvensen og modtagefrekvensen for disse signaler. Af (2) haves, at:

$$\begin{aligned} \frac{dt_s}{dT_m} &= \frac{u - v}{u} \Rightarrow \Delta t_s = \frac{u - v}{u} \cdot \Delta T_m \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\Delta t_s} &= \frac{u}{u - v} \cdot \frac{1}{\Delta T_m} \wedge \frac{1}{\Delta t_s} = f_s \wedge \frac{1}{\Delta T_m} = f_m \Rightarrow \\ f_s &= \frac{u}{u - v} \cdot f_m \Leftrightarrow f_s = \frac{1}{1 - \frac{v}{u}} \cdot f_m \Leftrightarrow \\ f_m &= \left(1 - \frac{v}{u}\right) \cdot f_s \end{aligned} \quad (3)$$

Modtageren måler altså en frekvens, der er mindre end den udsendte frekvens. Den relative frekvensændring er angivet ved forholdet  $v/u$ .

### Senderen bevæger sig mod modtageren

Lad os nu se på situationen, hvor senderen bevæger sig mod modtageren med en fart på  $v$ . Vi vælger tidsangivelsen således, at når senderen ankommer ved modtageren er  $T = t = 0$  og senderen afsender signalet når senderens ur viser den negative værdi  $-t_s$ . Dette tidspunkt er på modtagerens ur angivet som  $T(-t_s)$  og signalet modtages til tidspunktet  $-T_m$ , hvor  $0 > -T_m > T(-t_s)$ . Som før har vi følgende sammenhæng mellem de to tidspunkter:

$$T(-t_s) + \frac{x(T(-t_s))}{v + u} = -T_m \quad (4)$$

Ved opstilling af ovenstående ligning er det antaget, at signalet bevæger sig hurtigere end senderen. Andet led på venstre side er tidsintervallet for signalet at komme fra senderen til modtageren. Igen benytter vi, at angivelse af tidspunkter er ens i de to systemer og dermed haves at:

$$\begin{aligned} T(-t_s) &= -t_s \wedge \\ x(T(-t_s)) &= v \cdot (T(0) - T(-t_s)) = v \cdot (0 - (-t_s)) = v \cdot t_s \end{aligned}$$

Indsættes ovenstående i ligning (4) fremkommer følgende:

$$\begin{aligned} -t_s + \frac{v \cdot t_s}{v + u} &= -T_m \Leftrightarrow t_s \cdot \left(-1 + \frac{v}{v + u}\right) = -T_m \Leftrightarrow \\ t_s \cdot \left(1 - \frac{v}{v + u}\right) &= T_m \Leftrightarrow t_s \cdot \left(\frac{u}{v + u}\right) = T_m \Leftrightarrow \\ t_s &= \frac{v + u}{u} \cdot T_m \end{aligned} \quad (5)$$

Som før kan vi finde sammenhængen mellem sendefrekvensen ( $f_s$ ) og modtagefrekvensen ( $f_m$ ). Vi har altså:

$$\frac{dt_s}{dT_m} = \frac{v + u}{u} \Rightarrow \Delta t_s = \frac{v + u}{u} \cdot \Delta T_m \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t_s} &= \frac{u}{v+u} \cdot \frac{1}{\Delta T_m} \wedge \frac{1}{\Delta t_s} = f_s \wedge \frac{1}{\Delta T_m} = f_m \Rightarrow \\ f_s &= \frac{u}{v+u} \cdot f_m \Leftrightarrow f_s = \frac{1}{1+\frac{v}{u}} \cdot f_m \Leftrightarrow \\ f_m &= (1+\frac{v}{u}) \cdot f_s\end{aligned}\quad (6)$$

I denne situation måler modtageren en frekvens, der er større end den udsendte frekvens og i lighed med før er den relative frekvensændring angivet ved forholdet  $v/u$ .

## Relativistisk Dopplereffekt

### Senderen bevæger sig væk fra modtageren

Jeg vil nu gentage denne metode til at undersøge situationen ved afsendelse af elektromagnetiske signaler, hvor enten senderen eller modtageren bevæger sig med en betragtelig brøkdelen af lysets hastighed således, at resultater fra den specielle relativitetsteori benyttes.

Lad os betragte en sender, der bevæger sig væk fra modtageren. Til tidspunktet  $T = t = 0$  befinder senderen sig ved modtageren og bevæger sig derefter med konstant fart  $v$  radiale væk fra modtageren. Til tidspunktet  $t_s$  på senderens ur udsendes et elektromagnetisk signal i retning mod modtageren med farten  $c$ . På modtagerens ur svarer dette tidspunkt til  $T(t_s)$  og senderen befinder sig i afstanden  $x(T(t_s))$  fra modtageren. Tidspunktet, når signalet ankommer ved modtageren, angives som  $T_m$ , hvor  $T_m > T(t_s)$ . Vi har følgende sammenhæng mellem de to tidspunkter:

$$T(t_s) + \frac{x(T(t_s))}{c} = T_m \quad (7)$$

I forhold til situationen med lydbølgen bevæger elektromagnetiske signaler sig altid med farten  $c$  uanset bevægelsen af senderen. Desuden er der forskel på tidsangivelsen for identiske begivenheder inden for den specielle relativitetsteori. Benyttes resultaterne for Lorentz-transformationen fra den specielle relativitetsteori haves følgende:

$$T(t_s) = \frac{t_s}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \wedge x(T(t_s)) = v \cdot T(t_s) = \frac{v \cdot t_s}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Indsættes ovenstående i (7) har vi:

$$\frac{t_s}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{v \cdot t_s}{c \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = T_m \Leftrightarrow \frac{t_s}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot (1 + \frac{v}{c}) = T_m \Leftrightarrow$$

$$t_s \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} = T_m \Leftrightarrow t_s = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \cdot T_m$$

Igen ønsker vi at finde sammenhæng mellem sendetidsintervaller  $\Delta t_s$  og modtagetidsintervaller  $\Delta T_m$  for at finde sammenhæng mellem sende- og modtagefrekvenser. Ved differentiering haves:

$$\begin{aligned}\frac{dt_s}{dT_m} &= \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \Rightarrow \Delta t_s = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \cdot \Delta T_m \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\Delta t_s} &= \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \cdot \frac{1}{\Delta T_m} \Leftrightarrow f_m = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \cdot f_s\end{aligned}\quad (8)$$

Modtagefrekvensen er altså mindre end sendefrekvensen, når senderen bevæger sig væk fra modtageren.

### Senderen bevæger sig mod modtageren

Såfremt senderen bevæger sig mod modtageren kan vi benytte samme metode som før, hvor tidsangivelsen  $T = t = 0$  svarer til, når senderen ankommer ved modtageren. Tidspunktet når signalet afsendes, angives ved den negative værdi  $-t_s$  på senderens ur. Det tilsvarende tidspunkt på modtagerens ur er  $T(-t_s)$ . Idet signalet ankommer før senderen ved modtageren, har vi følgende sammenhæng mellem de to tidspunkter:

$$T(-t_s) + \frac{x(T(-t_s))}{c} = -T_m \quad (9)$$

Benyttes Lorentz-transformationen for at angive sammenhængen mellem tidsangivelserne i de to systemer haves følgende:

$$\begin{aligned}T(-t_s) &= \frac{-t_s}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \wedge \\ x(T(-t_s)) &= v \cdot (T(0) - T(-t_s)) = \frac{v \cdot (0 - (-t_s))}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

Indsættes ovenstående i (9) haves:

$$\begin{aligned}\frac{-t_s}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{v \cdot t_s}{c \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} &= -T_m \Leftrightarrow \\ \frac{t_s}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot (-1 + \frac{v}{c}) &= -T_m \Leftrightarrow \frac{t_s}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot (1 - \frac{v}{c}) = T_m \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$t_s \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} = T_m \Leftrightarrow t_s = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \cdot T_m$$

Ved at gennemføre identiske beregninger som før for at finde sammenhængen mellem  $\Delta t_s$  og  $\Delta T_m$  fremkommer følgende relation mellem modtage- og sendefrekvensen:

$$f_m = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \cdot f_s \quad (10)$$

Modtagefrekvensen er altså større end sendefrekvensen, når senderen bevæger sig mod modtageren.

### Modtageren bevæger sig væk fra senderen

I ovenstående situationer har senderen bevæget sig, mens modtageren har været stationær. Lad os nu betragte den situation, hvor senderen er stationær, mens modtageren bevæger sig. Formlerne bør være de samme som udledt ovenfor, idet relativitetsprincippet siger, at det eksperimentelt ikke er muligt at afgøre, om et system er i hvile eller bevæger sig med konstant hastighed i forhold til et andet system.

Urene i de to systemer synkroniseres således, at  $T = t = 0$  når modtageren passerer senderen med hastigheden  $v$  radialt væk fra modtageren. Til tidspunktet  $T_s$  afsendes signalet. Signalet modtages når modtagerens ur viser  $t_m$ . Det tilsvarende tidspunkt ved senderen er  $T(t_m)$  og modtageren befinder sig i afstanden  $x(T(t_m))$  fra senderen. Vi finder følgende sammenhæng mellem de to tidspunkter:

$$T_s + \frac{x(T(t_m))}{c} = T(t_m) \quad (11)$$

Benyttes Lorentz-transformationen som før haves:

$$T_s + \frac{v \cdot t_m}{c \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{t_m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot (1 - \frac{v}{c}) = T_s \Leftrightarrow t_m \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} = T_s$$

Ved differentiering fås:

$$\frac{dT_s}{dt_m} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \Rightarrow \Delta T_s = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \cdot \Delta t_m \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\Delta T_s} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \cdot \frac{1}{\Delta t_m} \Leftrightarrow f_m = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \cdot f_s$$

Dette resultat er identisk med det tidligere udledte, hvor senderen bevægede sig bort fra modtageren.

## Tidsangivelser i det bevægede system

### Senderen bevæger sig væk fra modtageren

Ved alle de foregående relativistiske beregninger har jeg i udgangspunktet benyttet tidsangivelsen samt afstandsangivelsen i det stationære system. Lad os gentage proceduren til beregning af sammenhængen mellem modtage- og sendefrekvensen men med udgangspunkt i tidsangivelsen for senderen, der bevæger sig med en konstant fart radialt bort fra modtageren. Sammenhængen skal naturligvis være den samme som angivet ved ligning (8).

Urene i de to systemer synkroniseres, således at  $T = t = 0$ , når senderen passerer modtageren med hastigheden  $v$  radialt væk fra modtageren. Til tidspunktet  $t_s$  angivet på senderens ur afsendes signalet og afstanden til modtageren ifølge senderen er  $l(t_s)$ , mens afstanden mellem disse to legemer ifølge modtageren er  $x(T(t_s))$ , idet  $T(t_s)$  er det korresponderende tidspunkt til  $t_s$  på modtagerens ur. Signalet modtages når modtagerens ur viser  $T_m$  og det tilsvarende tidspunkt på senderens ur er  $t(T_m)$ . Vi har følgende sammenhæng mellem de to tidspunkter:

$$t_s + \frac{l(t_s)}{c} = t(T_m) \quad (12)$$

Da senderen bevæger sig med farten  $v$  i forhold til modtageren oplever senderen, at afstanden er Lorentz-forkortet. Vi har altså:

$$l(t_s) = x[T(t_s)] \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \wedge x[T(t_s)] = v \cdot T(t_s) \Leftrightarrow$$

$$l(t_s) = v \cdot T(t_s) \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = v \cdot \frac{t_s}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = v \cdot t_s$$

Indsættes ovenstående i (12) haves:

$$t_s + \frac{v \cdot t_s}{c} = T_m \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Leftrightarrow$$

$$t_s \cdot (1 + \frac{v}{c}) = T_m \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Leftrightarrow t_s = T_m \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

Ovenstående fører herefter til samme relation mellem modtage- og sendefrekvensen som udledt ved (8) og dette var også forventet.

I en kommende artikel vil jeg behandle situationen for sende- og modtagefrekvenser, når senderen udfører en relativistisk, accelereret bevægelse.