

Mere RealD 3D: Polarisation, refleksion og Jones matricer

ULRICH BUSK HOFF, CPH-West Ishøj Gymnasium

1 Indledning

Efter den forrige artikel om RealD 3D blev jeg af Jens Ulrik Lefmann, Birkerød Gymnasium, gjort opmærksom på nogle interessante iagttagelser af, hvordan polarisationsændringer ved refleksion observeres igennem et par 3D briller:

- Hvis man med brillerne på ser vinkelret ind på et spejl, $\theta_i = 0^\circ$, og skiftevis lukker højre og venstre øje, vil man altid kun kunne se det lukkede øje. Brilleglaset foran det åbne øje fremstår uigenomsigtigt.
- Når man med brillerne på ser ind på to spejle, der står vinkelret på hinanden, $\theta_i = 45^\circ$, og skiftevis lukker højre og venstre øje, vil man altid kun kunne se det åbne øje. Brilleglaset foran det lukkede øje fremstår uigenomsigtigt.

Denne artikel har til formål at uddybe disse observationer samt introducere Jones matrix-formalismen, som et værktøj til simpel og elegant analyse af polarisationsfænomener.

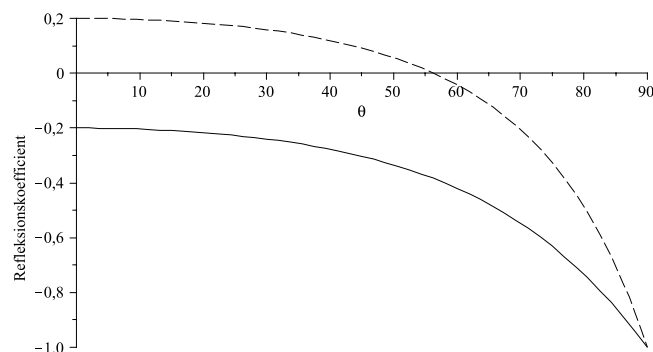
2 Fresnel ligningerne

Den forrige RealD artikel omtalte det fænomen, at lys polariseres ved refleksion fra en dielektrisk overflade, hvis indfaldsvinkelen er lig med en materialebestemt vinkel θ_p , kendt som Brewsters vinkel. Dette resultat følger af de mere generelle Fresnel ligninger, der beskriver refleksions- og transmissionskoefficienterne for amplituden af de komponenter af det elektriske felt, som er hhv. parallel med og vinkelret på indfaldsplanet. Refleksionskoefficienterne er givet ved

$$r_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$$

$$r_{\perp} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$$

hvor n_i og n_t er brydningsindices for hhv. indfalds- og transmissionsmediet, og θ_i og θ_t er indfalds- og transmissionsvinklerne [2]. Figur 1 viser de to refleksionskoefficienter som funktion af indfaldsvinkelen, hvor θ_t er blevet udtrykt i termer af θ_i vha. Snells lov. Ved en indfaldsvinkel på $\theta_i = 56,3^\circ$ er refleksionskoefficienten for den parallelle komponent nul, hvilket vil sige, at det reflekterede lys er linært polariseret. Dette er Brewsters vinkel for luft-glas overgangen. Mere interessant for denne artikel er, at refleksionskoefficienten for den vinkelrette komponent altid er negativ. Dette betyder, at den vinkelrette komponent af det elektriske felt ved en refleksion undergår et faseskifte på π i forhold til den parallelle komponent, så længe $\theta_i < \theta_p$.



Figur 1

Refleksionskoefficienterne r_{\parallel} (stiplet) og r_{\perp} (solid) som funktion af indfaldsvinkelen θ_i . Graferne er for $n_i = 1$ og $n_t = 1,5$ svarende til overgangen mellem luft og glas.

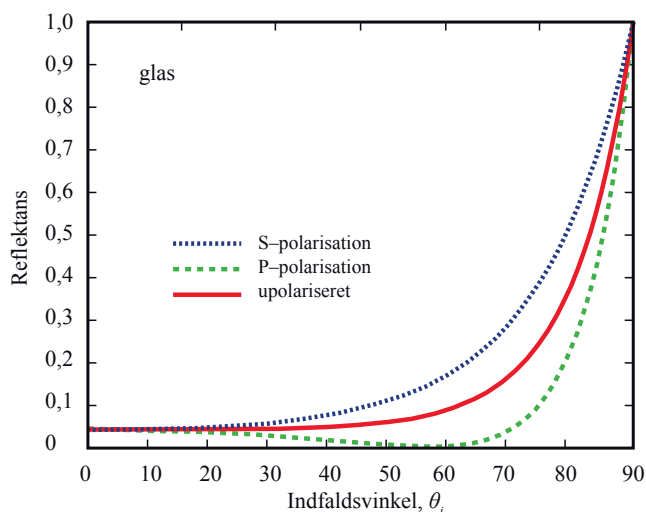
Ser vi på *reflektansen* R , dvs. refleksionskoefficienten for strålingsintensiteten, er denne (for vinkelret indfald) givet ved

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{n_i - n_t}{n_i + n_t} \right)^2$$

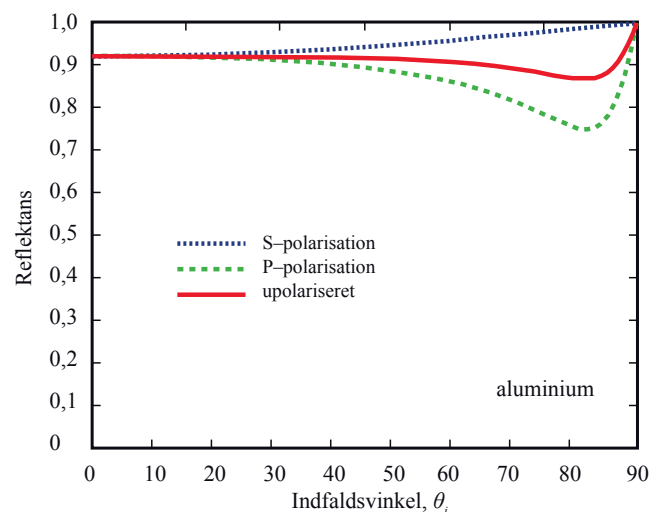
og indsættes brydningsindices for luft og glas fås $R = 0,04$. Dvs. at 4 % af lysets intensitet reflekteres tilbage ved vinkelret indfald på almindeligt vinduesglas. Et stykke glas i sig selv, som betragtet ovenfor, udgør altså et meget ringe spejl! I et almindeligt spejl skyldes refleksionen da heller ikke selve glasset, men derimod den metalliske belægning på glassets bagside (typisk sølv eller aluminium). Analysen af refleksion fra en metalliske overflade kompliceres betydeligt af tilstedeværelsen af frie ladninger og kræver, at der indføres et komplekst brydningsindeks $\tilde{n} = n_R - in_I$, hvor n_I bl.a. afhænger af metallets konduktivitet σ . I sidste ende opnås dog et sæt af ligninger for refleksions- og transmissionskoefficienterne for amplituden af det elektriske felt, i stil med Fresnel ligningerne ovenfor, som udviser det samme faseskifte. En afgørende forskel er dog, at reflektansen ([2] og [1])

$$R = \frac{(n_i - n_R)^2 + n_I^2}{(n_i + n_R)^2 + n_I^2}$$

kan øges betydeligt afhængig af metallets konduktivitet. For sølv og aluminium fås $R_{Ag} > 0,95$ og $R_{Al} > 0,90$, mens grænsetilfældet $\sigma = \infty$ for en perfekt leder giver $R = 1$. Inden for kvanteoptikken har man forsøgt at nærme sig denne grænse ved at anvende spejle med en superledende belægning. Herved opnås (under særlige vilkår) en så høj reflektans, at en enkelt foton kan holdes fanget imellem to spejle i over 100 ms [3].



Figur 2a
Reflektans som funktion af indfaldsvinkelen for glas ved $\lambda = 550 \text{ nm}$.
Kilde: graphics.cornell.edu/~westin/misc/fresnel.html



Figur 2b
Reflektans som funktion af indfaldsvinkelen for aluminium ved $\lambda = 550 \text{ nm}$.
Kilde: graphics.cornell.edu/~westin/misc/fresnel.html

En anden vigtig forskel mellem dielektriske og metalliske reflektorer er reflektansens afhængighed af indfaldsvinkel og polarisation. Figur 2 viser reflektansen for aluminium og glas som funktion af indfaldsvinkelen for parallel (P) og vinkelret polarisation (S)¹⁾, i forhold til indfaldsplanet, og det fremgår tydeligt, at de to polarisationsretninger reflekteres meget mere ligeligt fra aluminiumoverfladen. Dette har stor betydning for, i hvor høj grad polarisationen af det indkommende lys bevares ved refleksionen, dvs. om indkommende cirkulært polariseret lys også er cirkulært efter refleksionen eller i højere grad elliptisk.

3 Jones matrix-formalismen

Det er velkendt, at man i den geometriske optik kan beskrive og analysere, hvordan gaussiske strålers egenskaber ændres ved passage af diverse optiske elementer, ved hjælp af ABCD-matricer [4]. Mindre velkendt er måske Jones matrix-formalismen, der på tilsvarende vis muliggør en analyse af det elektriske felts polarisationstilstand ved at repræsentere denne ved en 2-dimensionel vektor og polarisationskomponenter ved 2×2 matricer [2]. De grundlæggende polarisationstilstande er givet ved fig. Jones vektorer:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_h &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{linær horisontal polarisation} \\ \mathbf{E}_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{linær vertikal polarisation} \\ \mathbf{E}_R &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} && \text{højre cirkulær polarisation} \\ \mathbf{E}_L &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} && \text{venstre cirkulær polarisation} \end{aligned}$$

Som nævnt repræsenteres polarisationselementer, så som polarisatorer og bølgeplader, ved 2×2 matricer. Fx er Jones-matricen for en kvartbølgeplade, med den optiske akse vertikalt orienteret, givet ved

$$\mathbb{J}_{\lambda/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

og faseskiftet ved refleksion, beskrevet i det foregående afsnit, ved

$$\mathbb{J}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hvis komponentens optiske akse er roteret med en vinkel θ i forhold til lodret foretages en rotationstransformation

$$\mathbb{J}(\theta) = \mathbb{R}(-\theta) \cdot \mathbb{J} \cdot \mathbb{R}(\theta)$$

hvor rotationsmatricen $\mathbb{R}(\theta)$ er givet ved

$$\mathbb{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

4 Analyse

Med udgangspunkt i den tidligere beskrevne opbygning af RealD brillerne, vil vi nu bruge Jones matrix-formalismen til at forklare de to indledende observationer.

4.1 Enkelt refleksion

I det første tilfælde ser vi direkte ind på spejlet og lyset undergår derfor kun én refleksion. Hvis vi lukker det højre øje og følger, hvordan polarisationen af lys, der spredes fra dette øje, ændres, får vi følgende: først bliver lyset linært horisontalt polariseret af polarisatoren på brilleglasets inderside, og polarisationstilstanden bliver derfor

$$\mathbf{E}_{\text{init}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) Betegnelserne S- og P-polarisation er standard inden for optikken, og stammer fra de tyske betegnelser *senkrecht* og *parallel*.

Derefter passerer det en kvartbølgeplade, hvis optiske akse er roteret med vinklen $\theta = 3\pi/4$ i forhold til vertikalt (komponenten er roteret omkring z-aksen, som i dette tilfælde altid er antiparallel med lysets udbredelsesretning).

$$\mathbf{E} = \mathbb{R}(-3\pi/4) \cdot \mathbb{J}_{\lambda/4} \cdot \mathbb{R}(3\pi/4) \cdot \mathbf{E}_{\text{init}}$$

Dernæst bliver lyset reflekteret fra spejlet, hvorved der introduceres et faseskifte, jf. ovenfor.

$$\mathbf{E} = \mathbb{J}_R \cdot \mathbb{R}(-3\pi/4) \cdot \mathbb{J}_{\lambda/4} \cdot \mathbb{R}(3\pi/4) \cdot \mathbf{E}_{\text{init}}$$

Hvis lyset reflekteres mod vores venstre øje skal det passere en kvartbølgeplade, der er roteret med vinklen $\theta = -\pi/4$ i forhold til vertikalt.

$$\mathbf{E}_{H \rightarrow V} = \mathbb{R}(\pi/4) \cdot \mathbb{J}_{\lambda/4} \cdot \mathbb{R}(-\pi/4) \cdot \mathbb{J}_R \cdot \mathbb{R}(-3\pi/4) \cdot \mathbb{J}_{\lambda/4} \cdot \mathbb{R}(3\pi/4) \cdot \mathbf{E}_{\text{init}}$$

Hvis lyset i stedet reflekteres mod vores højre (lukkede øje) skal det passere en kvartbølgeplade, der er roteret med vinklen $\theta = -3\pi/4$ i forhold til vertikalt.

$$\mathbf{E}_{H \rightarrow H} = \mathbb{R}(3\pi/4) \cdot \mathbb{J}_{\lambda/4} \cdot \mathbb{R}(-3\pi/4) \cdot \mathbb{J}_R \cdot \mathbb{R}(-3\pi/4) \cdot \mathbb{J}_{\lambda/4} \cdot \mathbb{R}(3\pi/4) \cdot \mathbf{E}_{\text{init}}$$

Udregnes de to serier af matrixprodukter fås:

$$\mathbf{E}_{H \rightarrow V} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}_{H \rightarrow H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det betyder, at lyset kan passere den horisontale lineære polarisator ved det venstre øje og absorberes af den ved det højre øje.

Lad os nu på samme måde se, hvad der sker med lys som spredes fra det åbne venstre øje. Vi får nu:

$$\mathbf{E}_{V \rightarrow V} = \mathbb{R}(\pi/4) \cdot \mathbb{J}_{\lambda/4} \cdot \mathbb{R}(-\pi/4) \cdot \mathbb{J}_R \cdot \mathbb{R}(-\pi/4) \cdot \mathbb{J}_{\lambda/4} \cdot \mathbb{R}(\pi/4) \cdot \mathbf{E}_{\text{init}}$$

$$\mathbf{E}_{V \rightarrow H} = \mathbb{R}(3\pi/4) \cdot \mathbb{J}_{\lambda/4} \cdot \mathbb{R}(-3\pi/4) \cdot \mathbb{J}_R \cdot \mathbb{R}(-\pi/4) \cdot \mathbb{J}_{\lambda/4} \cdot \mathbb{R}(\pi/4) \cdot \mathbf{E}_{\text{init}}$$

Udregnes igen de to serier af matrixprodukter fås:

$$\mathbf{E}_{V \rightarrow V} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}_{V \rightarrow H} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

I dette tilfælde vil lyset blive absorberet af den horisontale lineære polarisator ved det venstre øje, mens det passerer den ved det højre (lukkede) øje. Resultatet er altså, at man i spejlet ser det højre lukkede øje mens brilleglasset foran det venstre øje fremstår uigennemsigtigt. Lukker man i stedet det venstre øje, vil dette kunne ses, mens det højre brilleglas er sort (se figur 3). Ser man ind i spejlet med begge øjne åbne, er synet noget forvirrende, idet de to sæt af observationer overlejres.

4.2 Dobbelt refleksion

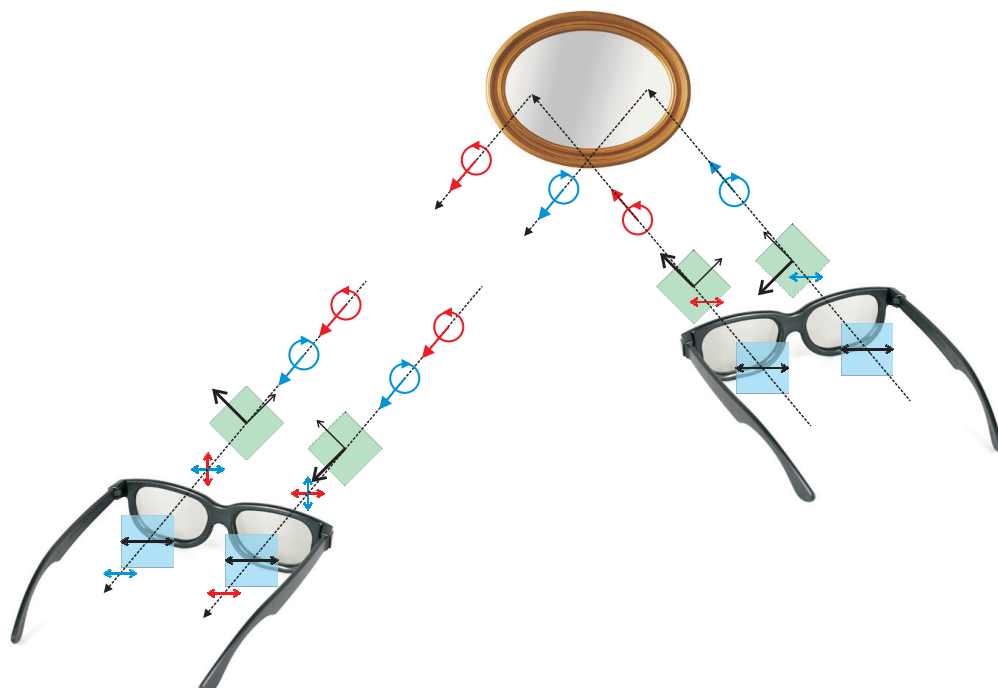
I det andet tilfælde ser vi ind i et hjørne mellem to ortogonale spejle, og det observerede lys har derfor gennemgået to refleksioner. Hvorledes dette påvirker lysets polarisationstilstand kan let analyseres ved at inkludere en ekstra \mathbb{J}_R -matrice i beregningerne fra forrige afsnit. Som før starter vi med at se på lys, der spredes fra det højre øje. Vi får:

$$\mathbf{E}_{H \rightarrow V} = \mathbb{R}(\pi/4) \cdot \mathbb{J}_{\lambda/4} \cdot \mathbb{R}(-\pi/4) \cdot \mathbb{J}_R \cdot \mathbb{J}_R \cdot \mathbb{R}(-3\pi/4) \cdot \mathbb{J}_{\lambda/4} \cdot \mathbb{R}(3\pi/4) \cdot \mathbf{E}_{\text{init}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_{H \rightarrow H} = \mathbb{R}(3\pi/4) \cdot \mathbb{J}_{\lambda/4} \cdot \mathbb{R}(-3\pi/4) \cdot \mathbb{J}_R \cdot \mathbb{J}_R \cdot \mathbb{R}(-3\pi/4) \cdot \mathbb{J}_{\lambda/4} \cdot \mathbb{R}(3\pi/4) \cdot \mathbf{E}_{\text{init}} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Figur 3

Lys spredes gennem brilleglassene på højresiden, undergår en enkelt refleksion og observeres gennem brillerne på venstresiden. Blå kvadrater angiver de horisontale polarisatorer på brilleglassenes inderside og de grønne kvadrater er kvartbølgepladerne på glassenes yderside. Orienteringen af kvartbølgepladernes optiske akse er angivet med tykke pile. Blå og røde pile angiver polarisationen af lys spredt fra hhv. det højre og venstre øje, i overensstemmelse med analysen ovenfor. Som det fremgår, er det kun lys spredt fra det højre øje, der kan observeres af det venstre og vice versa.



Ser vi i stedet på, hvordan lys der spredes fra det venstre øje observeres, får vi:

$$\mathbf{E}_{V \rightarrow V} = \mathbb{R}(\pi/4) \cdot \mathbb{J}_{\lambda/4} \cdot \mathbb{R}(-\pi/4) \cdot \mathbb{J}_R \cdot \mathbb{J}_R \cdot \mathbb{R}(-\pi/4) \cdot \mathbb{J}_{\lambda/4} \cdot \mathbb{R}(\pi/4) \cdot \mathbf{E}_{\text{init}} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_{V \rightarrow H} = \mathbb{R}(3\pi/4) \cdot \mathbb{J}_{\lambda/4} \cdot \mathbb{R}(-3\pi/4) \cdot \mathbb{J}_R \cdot \mathbb{J}_R \cdot \mathbb{R}(-\pi/4) \cdot \mathbb{J}_{\lambda/4} \cdot \mathbb{R}(\pi/4) \cdot \mathbf{E}_{\text{init}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Heraf følger, at højre øje altid kun kan se det højre, og at venstre øje altid kun kan se det venstre. Hvis man lukker øjnene på skift, vil det altid kun være det åbne øje der er synligt, mens brilleglasset foran det lukkede øje fremstår uigennemsigtigt.

5 Afrunding

Den foregående diskussion af polarisationsændringer ved refleksion er af stor betydning for 3D filmfremvisninger i praksis. Hvis polarisationen ændres ukontrollabelt under refleksionen fra lærredet, vil brillerne ikke være i stand til at filtrere lyset korrekt, og observatørens højre og venstre øje vil modtage en varierende blanding af de stereografiske optagelser. Derved ødelægges 3D virkningen. En konsekvens kunne eksempel-

vis være, at der på fuldstændig tilfældig vis byttes rundt på forgrund og baggrund i filmen. Af samme grund er det ikke et sædvanligt biograflærred, der benyttes ved 3D-fremvisninger, men en såkaldt *silver screen*, i stil med de skærme, der blev brugt i biografens spæde ungdom. Som vi har set ovenfor, er den metalliske overflade i langt højere grad polarisationsbevarende end et dielektrisk materiale, som funktion af indfaldsvinkelen. Det betyder, at 3D brillerne vil være i stand til at ”sortere” det reflekterede lys korrekt overalt i salen, og at alle biografgængerne vil få en tilfredsstillende 3D oplevelse. Metalskærmens høje reflektans er også af stor betydning, da der er et stort lystab ved 3D fremvisninger, i kraft af de nødvendige polarisationsfiltre (fx den polariserende Z-screen i projektoren og de lineære polarisatorer i brillerne). Uden den høj-reflekterende silver screen ville lysstyrken af det projicerede billede simpelthen ikke være tilstrækkelig høj.

Litteratur

- [1] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1999.
- [2] E. Hecht. *Optics*. Addison Wesley, 2002.
- [3] S. Kuhr et al. *Ultrahigh finesse Fabry–Perot superconducting resonator*. Appl. Phys. Lett., 90:164101, 2007.
- [4] P. W. Milonni and J. H. Eberly. *Lasers*. John Wiley & Sons, 1988.