

Måling af ventetider med Logger Pro

– Poissonfordelinger og Erlangfordelinger

AF PETER HUSBY, Frederiksberg Gymnasium

I forbindelse med et arbejde om telefoni, hvor vi bl.a. ville behandle Erlangfordelingerne, fik vi brug for at skaffe nogle måledata, der var Erlangfordelte. Det viste sig at være muligt at måle fx ventetider mellem radioaktive henfald med Logger Pro.

Radioaktive henfald hører til begivenheder, der følger af en Poissonproces. Her er tiden mellem to begivenheder (henfald) eksponentialfordelt med tæthedsfunktion

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \quad t \geq 0$$

med middelværdien $\frac{1}{\lambda}$, hvor t er tiden og λ er en konstant. Den kan også skrives

$$f(t) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0$$

hvor middelværdien så bliver gennemsnitstiden mellem begivenheder $\tau = \frac{1}{\lambda}$.

Antallet af henfald pr. tidsenhed bliver så Poissonfordelt med parameter λ :

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

hvor p_k er sandsynligheden for at få k tællinger pr. tidsenhed. En Erlang- k -fordeling er fordelingen af ventetiderne mellem k begivenheder, og tæthedsfunktionerne er

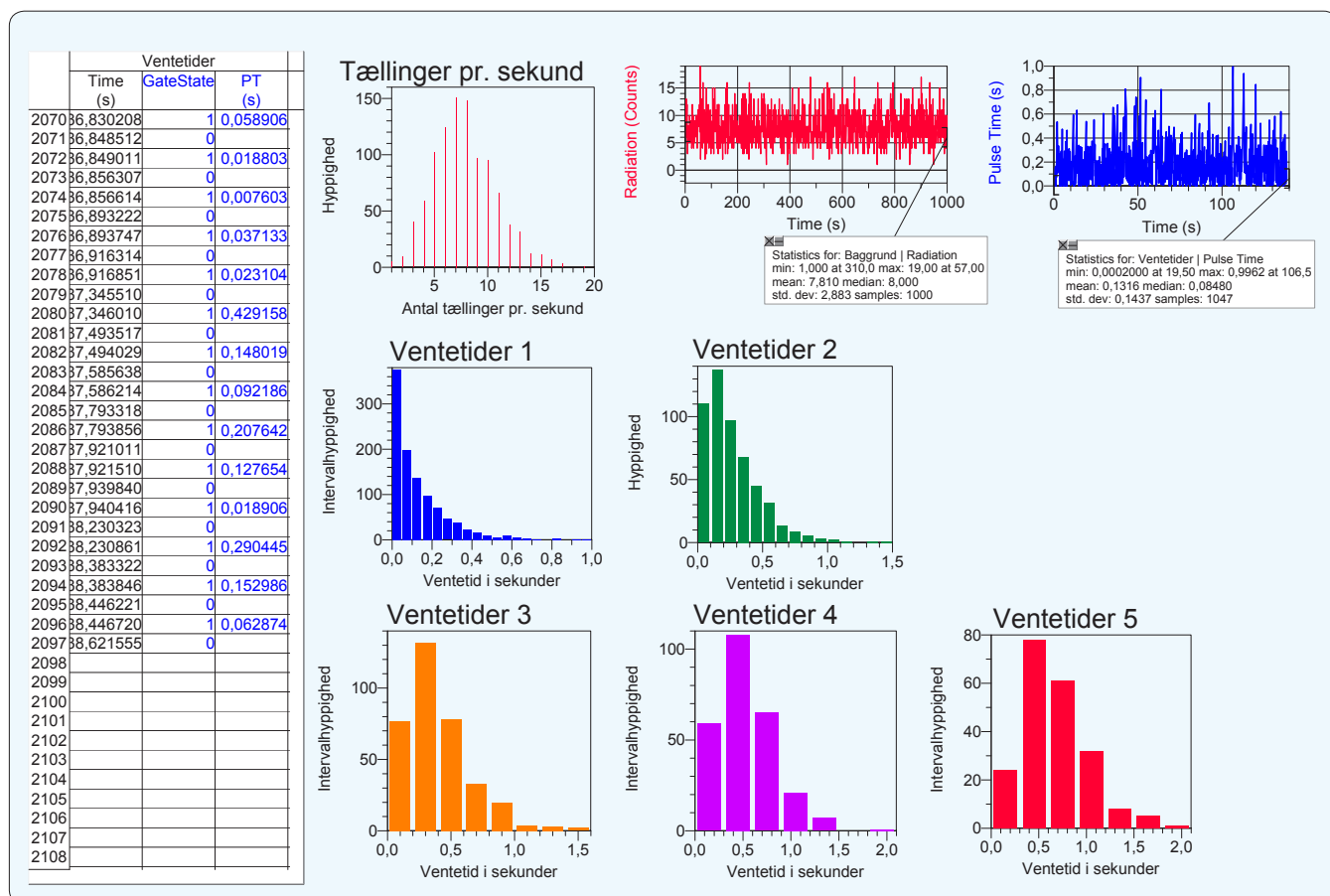
$$f_k(t) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot t^{k-1} \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \quad t \geq 0$$

hvor $k \in \mathbb{N}$. Når $k = 1$ er der tale om eksponentialfordelingen.

Målingerne forgår med Logger Pro og GM-modulet tilsluttet LabPro. I dette eksempel måles antallet af tællinger pr. s i 1000 s på sædvanlig måde, så observationssættet er på 1000 målinger.

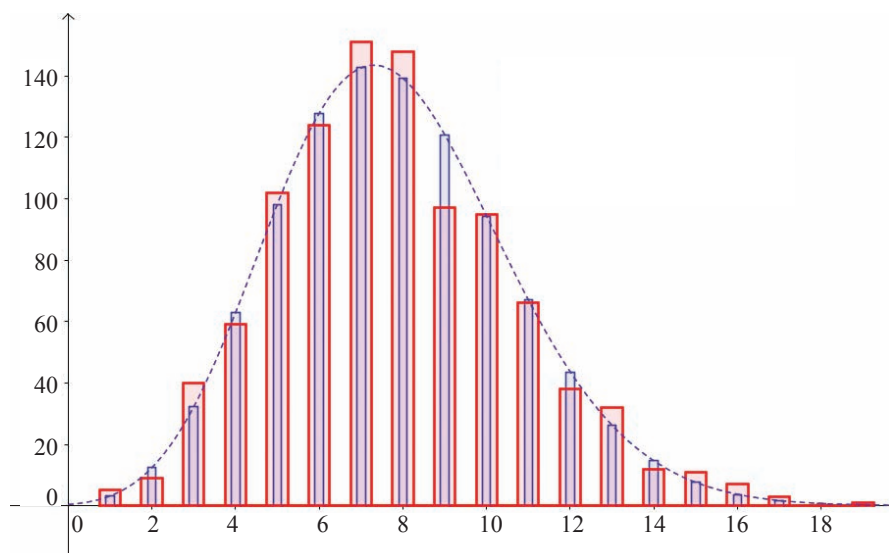
Med STAT-redskabet findes let middelværdien af data. Der er målt på baggrundsstrålingen i lokalet for ikke at få alt for små ventetider. I dette tilfælde var middelværdien, som vi identificerer med $\lambda = 7,81$. Derefter måles ventetiden mellem henfaldene på følgende måde:

I Logger Pro vælges menuen 'Experiment' > 'Set Up Sensors' > 'Show All Interfaces' så man får billedet af LabPro'en med det tilsluttede GM-modul på fx digital indgang 1. Klik nu på pilen for neden til højre på Radiation monitor-ikonet og vælg 'Remove Sensor'. Træk så 'Photogate'-ikonet til indgangen i stedet for og klik på pilen nederst til højre på Photogate-ikonet for at ændre måden, der måles på. Standard for fotogaten er 'Motion Timing'. Den skal ændres til 'Pulse Timing'. Så måler LabPro'en tiden mellem impulserne, som imidlertid nu ikke kommer fra fotogaten, men fra GM-røret! Man sæt-



Tykke søjler: Tællinger
 Smalle søjler: Poisson-fordeling

Stiplot graf: $1000 \cdot \frac{7,81^x}{x!} \cdot e^{-7,81}$



ter nu målingerne op til at måle et passende antal målinger. Med 1000 s som længde for målingen fik jeg 1047 ventetidsmålinger.

Logger Pro laver tabeller med 'Time', 'Gate State' og 'PT', som er pulstiden, vi skal bruge. Der er huller i PT-tabelen, men det betyder mindre. Lav en graf med (t, PT) og pulstidsmålingerne vises. Man kan finde gennemsnittet med STAT-redskabet. Her i eksemplet blev det 0,132 s, som vi identificerer med τ . Vi får så $\frac{1}{\tau} = 7,56 \approx \lambda$. Afvigelsen er ca. 3 %.

Nu kan man begynde at undersøge data på forskellig måde. Her har jeg tegnet stolpediagram for tælle-tallene i Logger Pro ved at vælge 'Insert' > 'Additional Graphs' > 'Histogram'. Ved at højreklikke i histogrammet og vælge 'Histogram Options...' får man mulighed for at vælge helt præcist, hvad der skal afbildes.

Tælle-tallenes histogram fås ved at vælge 'Radiation Counts', og ventetidernes ved at vælge 'Pulse Time'. Når man vælger 'Histogram Options' kan man endvidere vælge størrelsen af observationsintervallerne og startpunktet for intervallerne. Det får man brug for ved behandling af ventetiderne. Logger Pro laver to beregnede kolonner til histogramdataene: en kolonne med intervalmidtpunkter og en kolonne med hyppigheder.

Man kan godt lave kurvefitning i histogramvinduerne, men da Logger Pro 3 ikke har en fakultet-/gammafunktion, kommer man ikke så langt i denne situation. Derfor har jeg sakset histogramdataene over til Geogebra og lavet grafer der, som jeg har sammenlignet med de forventede observationer. I Poisson-tilfældet er der derfor beregnet

$$\text{antal observationer} \cdot p_k = 1000 \cdot p_k$$

For ventetiderne har jeg her brugt

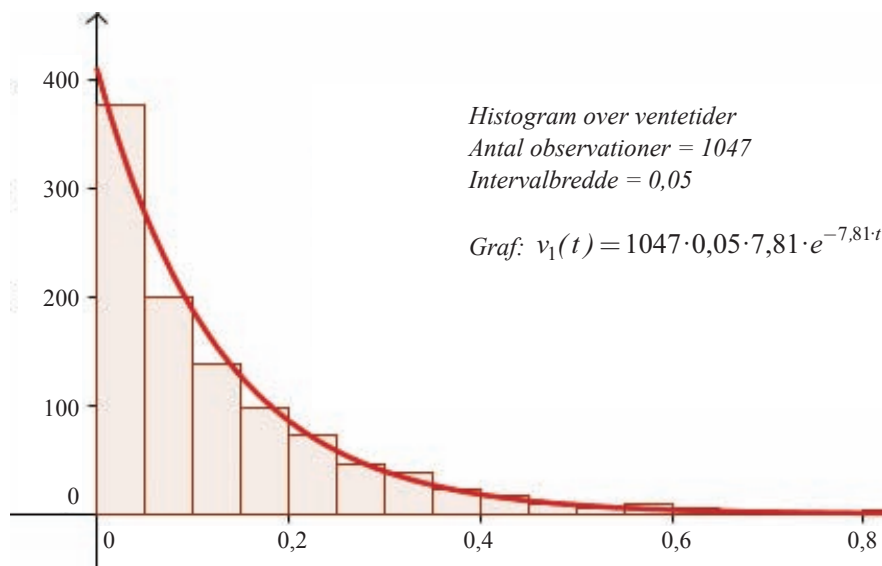
$$\text{antal observationer} \cdot \text{intervalbredde} \cdot f_k(t) = 1047 \cdot 0,05 \cdot f_k(t)$$

Man kan selvfølgelig beregne de præcise værdier af de forventede intervalhyppigheder, hvis man synes.

De øvrige Erlang-fordelinger findes ved at kopiere PT-data over i et regneark og heri lave en ny kolonne, hvor der beregnes summen af to på hinanden følgende ventetider. Så får man data for ventetiden mellem to henfald, og naturligvis kun halvt så mange observationer som før. På samme måde kan man beregne ventetider mellem 3, 4, 5 osv. henfald.

Hver gang reduceres antallet af observationer, så hvis man vil have en ordentlig statistik, må man have flere ventetider til at starte med. Jeg har vist resultaterne af ventetiderne mellem 2, 3, 4 og 5 henfald sammen med grafer for forventede observationer beregnet med metoden ovenfor. Som man kan se, er der umiddelbart god overensstemmelse mellem observationer og teoretiske fordelinger.

Man kan gøre undersøgelsen mere præcis ved at beregne de korrekte intervalhyppigheder, og man kan fx lave χ^2 -test for at undersøge, om observationerne er i overensstemmelse med modelforventningerne.



Histogram over ventetider
 Antal observationer = 1047
 Intervalbredde = 0,05

$$\text{Graf: } v_1(t) = 1047 \cdot 0,05 \cdot 7,81 \cdot e^{-7,81 \cdot t}$$

