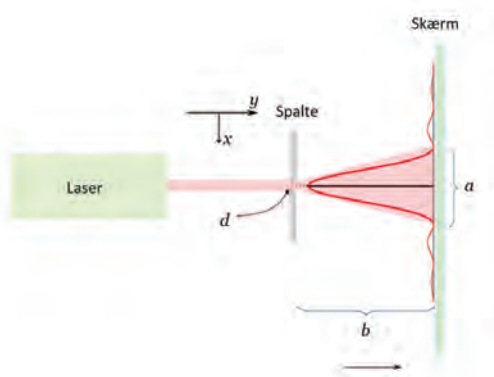


# Kvantefysik i laboratoriet

GUNNAR GUNNARSSON, KVUC

Mange elever er fascinerede af kvantemekanik, af gode grunde! Imidlertid er tendensen nok den, at forløb om kvantemekanik har det med at være meget teoretiske. Jeg vil her komme ind på nogle forsøg, som hver især illustrerer forskellige aspekter af kvantemekanikken. En del af forsøgene er i virkeligheden gode gamle klassiske forsøg, som med et skift i synsvinkel kan bruges til at gøre kvantemekanik mere håndgribelig. Den kvantemekaniske forklaring bliver så at sige ikke ugyldig, bare fordi vi har mange fotoner i en laserstråle. Forsøgene er først og fremmest tiltænkt A-niveau.

## Heisenbergs ubestemthedsrelationer



### Baggrund

Vi betragter en enkeltspalte med bredde  $d$ , som bestråles jævnt med laserlys, hvor laserstrålen er vinkelret på spalten. Da lysintensiteten er den samme over hele spalten, kan de fotoner, der passerer spalten, beskrives ved den normerede bølgefunktion

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d}} & |x| \leq \frac{d}{2} \\ 0 & |x| > \frac{d}{2} \end{cases}$$

Inden passage af spalten er fotonstrålen bred og ubestemtheden i fotonernes position i  $x$ -retningen er stor. Dermed er ubestemtheden i fotonernes  $x$ -komponent af impulsen  $p_x$  lille, strålen har således en veldefineret retning. Ved passage af spalten bliver ubestemtheden i  $x$ -positionen afgjort af spaltens bredde,  $\Delta x = d$ . Dette har indflydelse på ubestemtheden af  $p_x$ , den må ifølge ubestemthedsrelationerne vokse. Strålen vil derfor brede sig ud til begge sider bag spalten. Men hvor meget breder strålen sig ud, og hvordan er intensitetsfordelingen? Det findes ved at bestemme bølgefunktionens Fouriertransform:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(p_x) &= \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \psi(x) e^{-2\pi i p_x x / h} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{dh}} \cdot \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \cos(2\pi p_x x / h) dx = \sqrt{\frac{d}{h}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi p_x d}{h}\right)}{\frac{\pi p_x d}{h}} \end{aligned}$$

Kvadratet af bølgefunktionen giver som bekendt sandsynlighedsfordelingen for den kvantemekaniske partikel:

$$|\bar{\psi}(p_x)|^2 = \frac{d}{h} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi p_x d}{h}\right)}{\left(\frac{\pi p_x d}{h}\right)^2}$$

Det spektrum, der beskrives ved  $|\bar{\psi}(p_x)|^2$  er netop diffraktionsmønstrets intensitetsfordeling for enkeltspalten, velkendt fra klassisk fysik.

Ubestemtheden  $\Delta p_x$  i  $p_x$  defineres som den impuls, der kræves for at nå ud fra centrum til det første minimum, dvs. den halve bredde af centralpletten. Ved det første minimum fås:

$$\frac{\pi \Delta p_x d}{h} = \pi \Leftrightarrow \Delta p_x = \frac{h}{d}$$

Med denne definition af ubestemtheden er

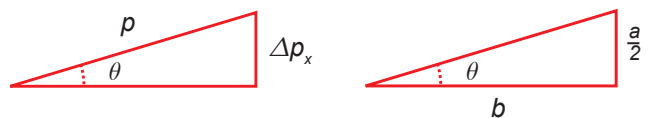
$$\Delta p_x \cdot \Delta x = h$$

Dette er i overensstemmelse med ubestemthedsrelationerne, da produktet af ubestemthederne er større end den teoretiske grænse givet ved

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{h}{4\pi}$$

### Forsøget

Eleverne præsenteres for ideen om, at centralplettens bredde hænger sammen med ubestemtheden i impuls. Ved at variere spalteåbningen (vi har brugt spalter fra Søren Frederiksen med bredde 0,04 mm, 0,08 mm og 0,14 mm) og måle centralplettens bredde, kan  $\Delta p_x$  bestemmes. Dette bygger på ensvinklede trekanter og sammenhængen mellem fotonens bølgelængde og impuls:



hvor  $a$  er den fulde bredde af centralpletten. Idet  $p = \frac{h}{\lambda}$  fås vha. de ensvinklede trekanter, at

$$\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \cdot \sin(\theta) = \frac{h}{\lambda} \cdot \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{a}{2b}\right)\right)$$

Målingen af ubestemtheden handler således om et par længdemålinger.

Det skal understreges over for eleverne, at formålet ikke er at bestemme Plancks konstant, men at vise, at diffraktions-

mønstret er i overensstemmelse med Heisenbergs ubestemthedsrelationer.

For lidt flere detaljer om forsøget, specielt den klassiske fortolkning, se Phywes eksperiment guide<sup>1)</sup>. Det kan i øvrigt nævnes, at den fremtrædende østrigske fysiker Anton Zeilinger for nogle år siden udførte diffraktionsforsøg med  $C_{70}$ -molekyler, hvor han demonstrerer opfyldelse af ubestemthedsrelationerne<sup>2)</sup>.

### Superposition og fotonpolarisering

Forsøg med polarisering er vældig gode til illustration af superposition i kvantemekanik. Ved at polarisere lys fra fx en diodelygte, får man ”tilberedt” fotoner i en bestemt polarisationstilstand. Denne tilstand kan betragtes som superposition af to uafhængige polarisationsretninger. Vælges fx vandret ( $V$ ) og lodret ( $L$ ) som de to uafhængige retninger, vil enhver polarisationsretning ved at indføre en passende vinkel, kunne udtrykkes ved disse to. Betegnes den vandrette polarisering med vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  og den lodrette med vektoren  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  vil en vilkårlig polarisationsretning kunne beskrives ved vektoren

$$\vec{\psi}(\theta) = \cos(\theta) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(\theta) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hvor vinklen  $\theta \in [0, 90^\circ]$  er målt i forhold til vandret.

Nu introducerer vi en af kvantemekanikkens (eller Københavnerfortolkningens) hjørnesteene, nemlig om superpositionens kollaps ved måling. Og endvidere, at sandsynligheden  $P(\theta)$  for et bestemt udfald er givet ved længden i anden potens af projektionen af  $\vec{\psi}(\theta)$  på tilstanden. Sandsynligheden for at måle fotonen i tilstanden  $V$  er derfor

$$P(\theta) = \left| \vec{\psi}_\theta \cdot \vec{V} \right|^2 = \cos^2(\theta)$$

Således kan Malus’ lov om lysintensitetens afhængighed af vinklen mellem polarisationsretningerne fortolkes ud fra kvantemekanikkens grundprincipper.

Forsøget udføres som et klassisk polarisationsforsøg med to polarisationsfiltre, diodelygte og lysmåler. Vinklen mellem filtrene varieres.

Som en sjov ekstraopgave kan man indføre et polarisationsfilter imellem to ortogonale polarisationsfiltre og både regne på og måle, hvor meget lys, der kommer i gennem, afhængig af det nye filters retning.

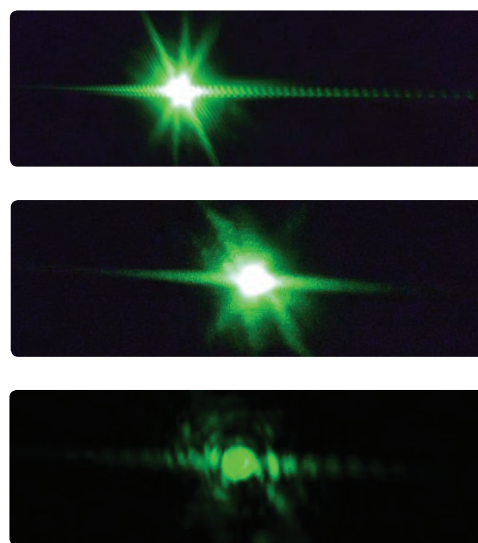
### Quantum eraser

En ”quantum eraser” er en forsøgsopstilling til demonstration af, hvordan interferens mellem forskellige baner ødelægges, når forsøgsbetingelserne gør det muligt at bestemme, hvilken vej en partikel følger. Dette efterfølges af en tilføjelse til forsøgsopstillingen, hvor informationen om banen slettes, hvorved interferensmønstret genopstår. Deraf navnet eraser.

En billig udgave af forsøget blev foreslået i *Scientific American* for et par år siden<sup>3)</sup>. Forsøget går ud på at sende laserlys mod en tynd tråd. Herved vil der opstå interferensmønstre bag tråden.

Dernæst opsættes ortogonale polarisationsfiltre på hver sin side af tråden således, at der ikke er gab imellem filter og tråd. Filtrene har ændret forsøgsbetingelserne. For selvom vi ikke måler, hvilken vej en given foton følger, er det i princippet muligt pga. filtrene. Interferensmønstret vil nu forsvinde. Endelig indsættes et tredje polarisationsfilter efter de andre to, med en polarisationsretning  $45^\circ$  i forhold til de to andre filtre. Det nye filter vil bevirke, at de fotoner der kommer i gennem, har mistet ”hukommelsen”. Der er ingen information længere om, hvilken vej fotonerne tidligere fulgte. Herved genopstår interferensmønstret.

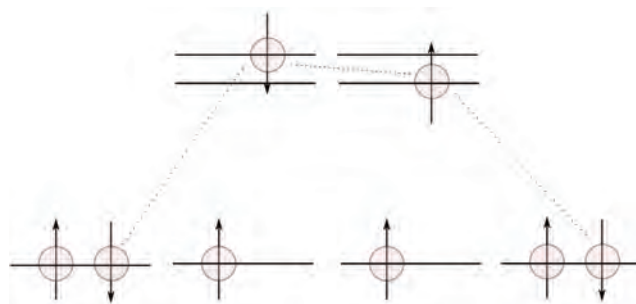
Forsøget er oplagt som et demonstrationsforsøg fx i forbindelse med gennemgang af dobbelspalteforsøgene. Men som sagt er det ikke altid, at den hjemmestrikkede opstilling markeret ret, da små ujævnheder ved grænserne mellem tråd og filter kan ødelægge det hele.



Den øverste figur viser diffraktionsmønstret for en tråd. Figuren i midten viser det manglende diffraktionsmønster når de to polarisationsfiltre hægtes på tråden. Figuren forneden viser det genopståede diffraktionsmønster med det tredje  $45^\circ$  polarisationsfilter. Spektrene er fotograferet med et digitalkamera, men i lidt forskellige afstande fra skærmen pga. forskelligheden i lysstyrke i de tre opstillinger.

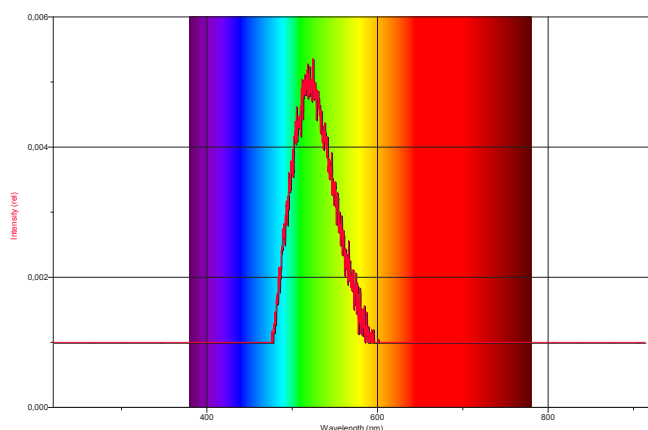
### Metastabile tilstande og fosforescens

I modsætning til mange radioaktive henfald er atomare henfald ved ”normale” overgange så hurtige, at det er umuligt at måle på tilstandenes levetid i et almindeligt gymnasielaboratorium. Undtagelsen er metastabile tilstande, som kan have en levetid af størrelsesordenen sekunder. Metastabile tilstande kan opstå, hvis excitationprocessen involverer en ændring



af elektronernes spintilstand. Elektronen bliver fanget i den exciterede tilstand, og atomet kan kun komme ned til grundtilstanden, hvis elektronen samtidig vender tilbage til sin oprindelige spintilstand. Dette gør processen usandsynlig, derfor den lange levetid.

Den lange levetid betyder også, at belyses stof med disse egenskaber, vil det give en efterglød – stoffet er fosforescerende. Dette kendes især fra ”glow in the dark” legetøj. Her bruges normalt zinksulfid. Zinksulfid gløder dog meget svagt og eftergløden holder ikke særlig længe. Et bedre alternativ er strontiumaluminat (doteret med europium og dysprosium). Stoffet kan exciteres med UV-lys fra fx en Hg-lampe. Efterfølgende emitteres lys med bølglængder i et spektrum omkring 520 nm. Figuren nedenunder viser emissionsspektret, optaget med Verniers Spectrovis spektrometer.

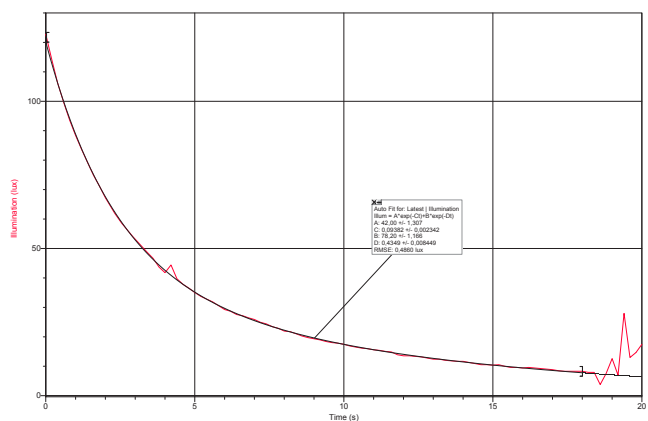


Tidsudviklingen kan fx måles med Verniers lysmåler. Grafen nedenunder viser lysintensiteten som funktion af tiden.

Henfaldskurven kan ikke beskrives ved en eksponentielt aftagende funktion. Derimod giver en bi-eksponentiel funktion

$$L(t) = A \cdot e^{-B \cdot t} + C \cdot e^{-D \cdot t}$$

en ganske god beskrivelse af forløbet, hvor den ene henfaldskonstant er ca. 5–10 gange større end den anden. Hvad dette skyldes er mig ikke helt klart, men det ligner henfald fra to nærtliggende tilstande med hver sin levetid.



I modsætning til almindeligt eksponentielt henfald vil værdien af henfaldskonstanterne afhænge af, hvornår målingen starter,

og bestemmelsen af især den store henfaldskonstant er meget usikker. Laves regression på den sidste del af grafen, hvor den hurtige komponent mere eller mindre er væk, giver en eksponentiel funktion en god beskrivelse af forløbet og halveringstiden måles til omkring 7 sekunder.

## Kvanteprikker

I den gamle udgave af lærebogen Spektrum II findes et ualmindeligt velskrevet kapitel om kvantefysik. Her gennemgås bl.a. energikvantisering af en partikel i en boks. For en partikel med massen  $m$  i en én-dimensionel boks med sidelængden  $L$  er energien i grundtilstanden

$$E = \frac{h^2}{8 \cdot m \cdot L^2}$$

Hvis partiklen befinder sig i en kugleformet boks, er energien den samme – blot med sidelængden erstattet med radius. Denne sammenhæng mellem energi og størrelse af boksen kan undersøges eksperimentelt.

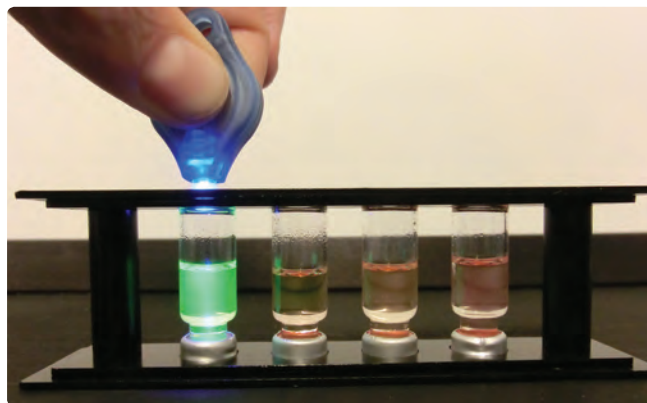
Kvanteprikker er nanometersmå partikler af en halvleder, som kan indeholde elektroner, der mere eller mindre frit kan bevæge sig rundt. Ved at belyse en prøve med kvanteprikker, kan der dannes elektron-hul par. Elektronen og hullet kan betragtes som to partikler i en boks. Boksen er dog ikke helt tom, da halvlederen også har båndgabsenergi. Energien for kvanteprikkerne er

$$E = \frac{h^2}{8 \cdot m_e^* \cdot R^2} + \frac{h^2}{8 \cdot m_h^* \cdot R^2} + E_{gab}$$

Her er  $m_e^*$  og  $m_h^*$  den effektive masse af hhv. elektronen og hullet. Dette kan forenkles ved at betragte elektronen og hullet som én partikel med den reducerede masse  $\mu$ , hvor

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_e^*} + \frac{1}{m_h^*}$$

Hos Skolebutik kan man købe et sæt væskeopløsninger, der indeholder kvanteprikker i forskellige størrelser. Ved at belyse opløsningerne med violet lys, dannes elektron-hul par, hvis energi afhænger af prikkenes størrelse. Den efterfølgende rekombination af elektronen og hullet resulterer derfor i lys, hvis bølglængde afhænger af prikstørrelsen.



Producenten oplyser prikstørrelserne samt båndgabsenergien og den effektive masse af elektronen og hullet:  $E_{gab} = 0,215$  eV,

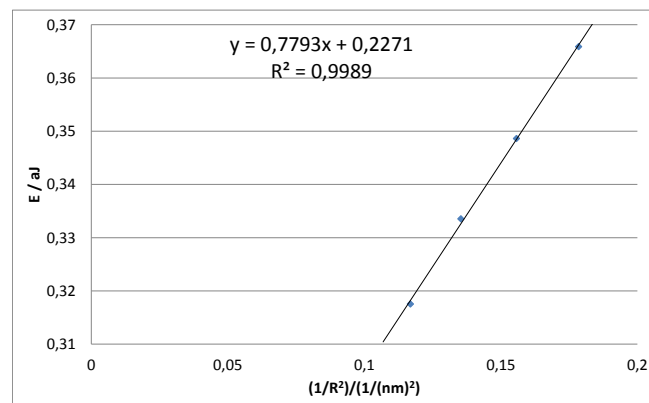
$m_e^* = 7,29 \cdot 10^{-32}$  kg,  $m_h^* = 5,47 \cdot 10^{-31}$  kg. Prikstørrelsen varierer fra 2,367 nm til 2,925 nm.

Ved at måle bølgelængden af emissionslinjerne fra hver af opløsningerne med et spektrometer kan vi teste sammenhængen mellem energien og radius af kvanteprikkerne. Grafen viser resultatet.

Konstantleddet 0,227 aJ stemmer nogenlunde med båndgabsenergien. Ellers ses en tydelig  $1/R^2$ -afhængighed for energien. Teoretisk set er hældningen 0,85 aJ·nm<sup>2</sup>, eller ca. 10 % over grafens hældning.

<sup>1)</sup> [phywe.com/index.php/fuseaction/download/lrn\\_file/versuchsanleitungen/P2230100/e/P2230100.pdf](http://phywe.com/index.php/fuseaction/download/lrn_file/versuchsanleitungen/P2230100/e/P2230100.pdf)

<sup>2)</sup> [arxiv.org/pdf/quant-ph/0105061.pdf](http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0105061.pdf)



<sup>3)</sup> [scientificamerican.com/article.cfm?id=slide-show-do-it-yourself-diy-quantum-eraser](http://scientificamerican.com/article.cfm?id=slide-show-do-it-yourself-diy-quantum-eraser)