

# Nal gammadetektor og Cs-137 gammaspektrum

## Artikel 1

PETER KJELDSEN, Rosborg Gymnasium

### Resume

Med udgangspunkt i Klein–Nishinas formel for det differentielle Comptontværsnit beregnes gammaspektrets form for henfald af Cs-137 opmålt i en cylindrisk NaI detektor med dimensionerne 5 cm × 5 cm.

Resultatet af beregningen, der *kun* inkluderer enkeltvekselvirkninger, gengiver comptonplateauet, comptonkanten og fototoppen, men ikke med de rette størrelsesforhold. Fototoppen er markant for lille og comptonkanten tilsvarende for stor og skarp.

### Gammadetektor

En gammadetektor registrerer og måler fotonenergien af den indkommende gammafoton.

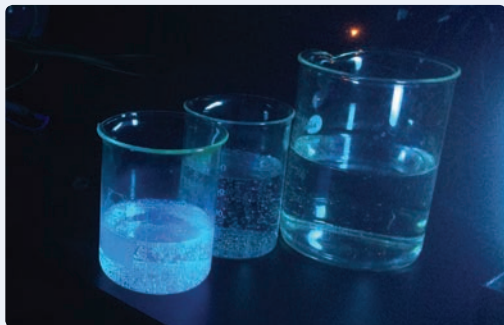
Måden dette foregår på, er ideelt, at detektoren omdanner fotonenergien til kinetisk energi for en løsrevet elektron, der så efterfølgende exciterer krystalelektroner ved tusinde af sammenstød, indtil al den kinetiske energi er omsat i krystallen.

Efterfølgende udsender de exciterede krystalelektroner synligt blå lys (scintillerer), når de springer tilbage til grundtilstanden. Det blå lys reflekteres dernæst mod en katode og frigør elektroner ved fotoelektrisk effekt. Fotoelektronerne multiplicerer i antal gennem fotomultiplikatoren og resulterer til sidst i en kortvarig spændingspuls, der måles med et voltmeter. Størrelsen af spændingspulsen er et direkte mål for energien af den indkommende gammastråling.

#### Eksempel

UV-lampen udsender en række kraftige UV-linjer, der får kinin i tonicvand til at scintilere. I dansk vand og alm. vand sker reaktionen ikke. Scintillationen har her farven blå. Scintillationen stopper øjeblikkelig, hvis der sættes et UV-filter foran lyskilden.

Konklusion: Kinin omdanner UV lys til synligt blå lys og fungerer dermed som en UV-detektor.



Figur 1

Kinin i tonicvand scintilerer ved bestråling med UV-lys

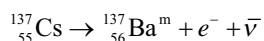
Foruden fotoelektrisk absorption undergår størstedelen af de primære fotoner comptonspredning, hvormed kun en del af fotonenergien overføres til comptonelektronen og dermed krystallen.

De comptonspredte fotoner har yderligere mulighed for at vekselvirke med krystallen ved fotoelektrisk effekt eller comptonspredning og hermed skabe en sekundær byge af scintillationer. Eksempelvis fotoelektrisk absorption af den comptonspredte foton resulterer i én registrering svarende til en primær fotoelektrisk absorption. Grunden til dette er, at fotonvekselvirkningerne foregår næsten momentant, og detektoren når derfor ikke at skelne mellem de næsten samtidige begivenheder. Histogrammet over fotonregistreringer kalibreret til fotonenergi kaldes gammaspektret. Gammaspektret udviser forskellige karakteristika, så som comptonplateau, comptonkant, fototop og tilbagespredningstop.

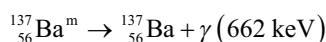
I det følgende forsøges gammaspektret beregnet teoretisk med udgangspunkt i det differentielle comptontværsnit.

### Cs-137 radioaktiv kilde

Cs-137 henfalder ved  $\beta^-$ -henfald og overvejende til en metastabil tilstand af Ba-137



Ba-137m henfalder efterfølgende ved gammahenfald og udsender en gammafoton med energien 662 keV



### Comptonspredning

Hvis en indkommende gammafoton med energien  $E_\gamma$  vekselvirker med en løst bundet elektron, så den spredte foton fortsætter i en ny retning  $\theta$  i forhold til den uforstyrrede retning og tilsvarende, at den spredte elektron fortsætter i retning  $\phi$ , gælder formlerne for comptonspredning:

$$E_{\gamma'} = \frac{E_\gamma}{1 + \alpha \cdot (1 - \cos(\theta))}$$

hvor

$$\alpha = \frac{E_\gamma}{m_e \cdot c^2} = \frac{E_\gamma [\text{keV}]}{511 \text{ keV}}$$

og

$$\cot(\phi) = (1 + \alpha) \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Den spredte foton i retning bagud dvs.  $\theta = 180^\circ$  har den mindste energi af de comptonspredte fotoner, og størrelsen af den mindste energi er givet ved

$$E_{\gamma', \min} = \frac{E_\gamma}{1 + \alpha \cdot (1 - \cos(180^\circ))} = \frac{E_\gamma}{1 + \alpha \cdot 2} = 184 \text{ MeV}$$

Den spredte elektron modtager energiforskellen mellem energien for den indkommende foton og den spredte foton. Benævnes elektronens overførte energi  $T$ , fås dermed

$$T = E_\gamma - E_{\gamma'} = E_\gamma \cdot \frac{\alpha \cdot (1 - \cos(\theta))}{1 + \alpha \cdot (1 - \cos(\theta))}$$

Den maksimale energioverførsel til elektronen, sker når den comptonspredte foton sendes bagud, og størrelsen af den største elektronenergi er derfor

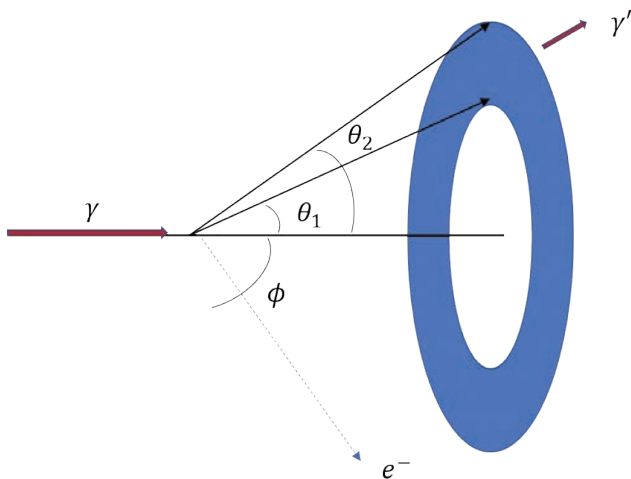
$$T_{\max} = E_\gamma - E_{\gamma', \min} = E_\gamma \cdot \frac{\alpha \cdot 2}{1 + \alpha \cdot 2} = 478 \text{ MeV}$$

### Klein–Nishina formel for det differentielle comptonspredningstværsnit

Det differentielle tværsnit for fotoner spredt på elektroner er givet ved Klein–Nishina formelen:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos(\theta)^2 + \frac{\alpha^2 \cdot (1 - \cos(\theta))}{1 + \alpha \cdot (1 - \cos(\theta))}}{1 + \alpha \cdot (1 - \cos(\theta))}$$

i enheden  $r_e^2 = 0,07941 \text{ barn}$ .



Figur 2

Comptonspredt foton i retning mellem  $\theta_1$  og  $\theta_2$ .

Med det differentielle tværsnit er man i stand til at beregne tværsnittet for de comptonspredningsprocesser, hvor den spredte foton fortsætter i eksemplvis retninger fra  $\theta_1$  til  $\theta_2$  ved formelen

$$\sigma_c(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, E_\gamma) \cdot \sin(\theta) d\theta$$

Det totale comptonspredningstværsnit fås ved at integrere over alle vinkler fra  $\theta = 0^\circ$  til  $\theta = 180^\circ$ :

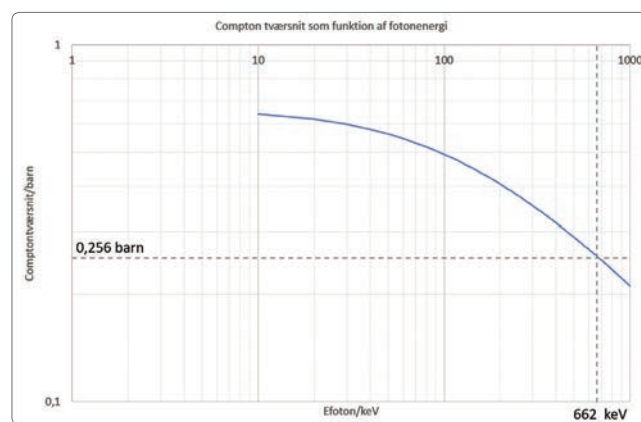
$$\sigma_{\text{Ctot}}(E_\gamma) = 2\pi \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, E_\gamma) \cdot \sin(\theta) d\theta$$

### Det totale comptonspredningstværsnit

Energiafhængigheden for det totale compton tværsnit er givet ved grafen Figur 3, og man observerer, at tværsnittet for comptonspredning aftager for voksende fotonenergi.

For 662 keV fotoner er det totale compton tværsnit lig med

$$\sigma_{\text{Ctot}}(E_\gamma = 662 \text{ keV}) = 0,256 \text{ barn}$$



Figur 3

Det totale compton tværsnit som funktion af fotonenergi fra 10 keV til 1 MeV i enheden barn.

### Den lineære comptonabsorptionskoefficient samt masseabsorptionskoefficient

Med det totale compton tværsnit kan man beregne den lineære comptonabsorptionskoefficient ved formelen

$$\mu_c(E_\gamma) = n_{\text{elek}} \cdot \sigma_{\text{Ctot}}(E_\gamma) = Z_{\text{eff}} \cdot \rho \cdot \frac{N_A}{M} \cdot \sigma_{\text{Ctot}}(E_\gamma)$$

hvor  $Z_{\text{eff}}$  er det effektive antal elektroner per kerneenhed.

Den lineære absorptionskoefficient har enheden

$$[\mu_c] = [n \cdot \sigma] = \text{cm}^{-3} \cdot \text{cm}^2 = \text{cm}^{-1}$$

For Na(I) krystallen gælder, at densiteten er  $\rho_{\text{NaI}} = 3,67 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  og molmassen  $M_{\text{NaI}} = 149,89 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ .

Kernetætheden af NaI kerner er dermed givet ved

$$n_{\text{NaI}} = \rho_{\text{NaI}} \cdot \frac{N_A}{M_{\text{NaI}}} \\ = 3,67 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{149,89 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 1,4747 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$$

og da hver NaI enhed indeholder  $11 + 53 = 64$  elektroner, er elektrontætheden

$$n_{\text{elek}} = 64 \cdot 1,4747 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} = 9,438 \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-3}$$

Den lineære comptonabsorptionskoefficient for 662 keV gammafotoner har dermed værdien

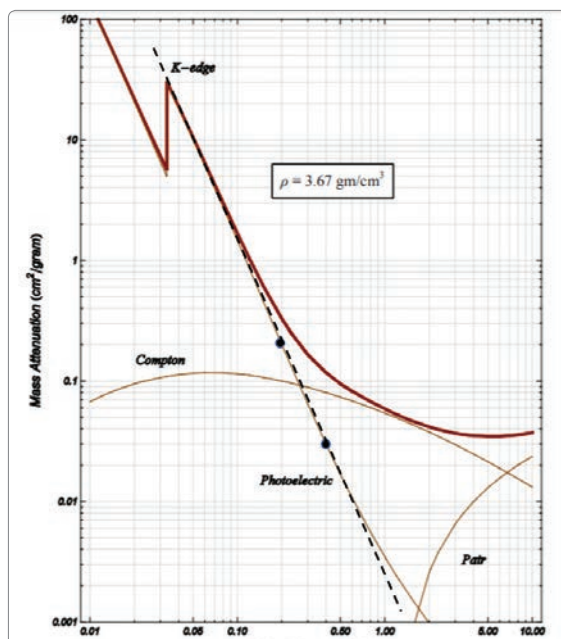
$$\mu_c(E_\gamma = 662 \text{ keV}) = n_{\text{elek}} \cdot \sigma_{\text{Ctot}}(E_\gamma = 662 \text{ keV}) \\ = 9,438 \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-3} \cdot 0,256 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 = 0,242 \text{ cm}^{-1}$$

og generelt:

$$\mu_c(E_\gamma) = n_{\text{elek}} \cdot \sigma_{\text{Ctot}}(E_\gamma)$$

Tilsvarende for masseabsorptionskoefficienten for comptonspredning:

$$\frac{\mu_c(E_\gamma)}{\rho_{\text{NaI}}} = \frac{n_{\text{elek}} \cdot \sigma_{\text{Ctot}}(E_\gamma)}{\rho_{\text{NaI}}}$$



Som det ses på Figur 4 er masseabsorptionskoefficienten for fotoelektrisk effekt som funktion af fotonenergien tilnærmelsesvis en ret linje i dobbeltlogaritmisk koordinatsystem. Det betyder, at masseabsorptionskoefficienten er beskrevet ved en potensfunktion, der bestemmes ud fra aflæsning af to punkter på grafen.

Med punkterne  $(200 \text{ keV}; 0,2 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}})$  og  $(400 \text{ keV}; 0,03 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}})$  fås

ligningen for masseabsorptionskoefficienten for fotoelektrisk effekt i energiintervallet  $\cong [50 \text{ keV}; 700 \text{ keV}]$ :

$$\frac{\mu_{\text{Foto}}(E_\gamma)}{\rho_{\text{NaI}}} = 3,97073 \cdot 10^5 \cdot E_\gamma (\text{keV})^{-2,737} \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$$

Den totale masseabsorptionskoefficient for NaI-krystallen i energiintervallet  $\cong [50 \text{ keV}; 700 \text{ keV}]$  fås som summen af masseabsorptionskoefficienterne for henholdsvis compton- og fotoelektrisk effekt, da der ses bort fra både elastisk spredning og pardannelse.

For  $E_\gamma = 662 \text{ keV}$  fås den totale masseabsorptionskoefficient og dermed den lineære absorptionskoefficient til

$$\frac{\mu_{\text{tot}}(E_\gamma)}{\rho_{\text{NaI}}} = 0,0734 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}} \Leftrightarrow \\ \mu_{\text{tot}}(E_\gamma) = 3,67 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 0,0707 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}} = 0,27 \text{ cm}^{-1}$$

NaI-krystallen på min skole har form som en cylinder med diameter og højde lig med 5,0 cm. På grund af isotrop fotonudsendelse fra gammakilden, er den effektive krystallængde ca. 3,3 cm.

NaI-krystallen, der bestråles af gammastråling med  $E_\gamma = 662 \text{ keV}$  isotropt, absorberer dermed brøkdelen af den indkommende stråling givet ved:

$$\text{Abs}(662 \text{ keV}) = 1 - e^{-\mu_{\text{tot}}(E_\gamma) \cdot x} = 1 - e^{-0,27 \text{ cm}^{-1} \cdot 3,3 \text{ cm}} \cong 60 \%$$

hvor der med absorption menes vekselvirkning ved fotoelektrisk effekt eller comptonspredning.

Yderligere kan det beregnes, at de 60 % vekselvirkende fotonerne i gennemsnit tilbagelægger 1,4 cm i krystallen, før de vekselvirker. De resterende 40 % fotoner passerer altså NaI-krystallen uden at vekselvirke.

Figur 4  
Masseabsorptionskoefficient for Na(I) detektor.

## Branching ratios

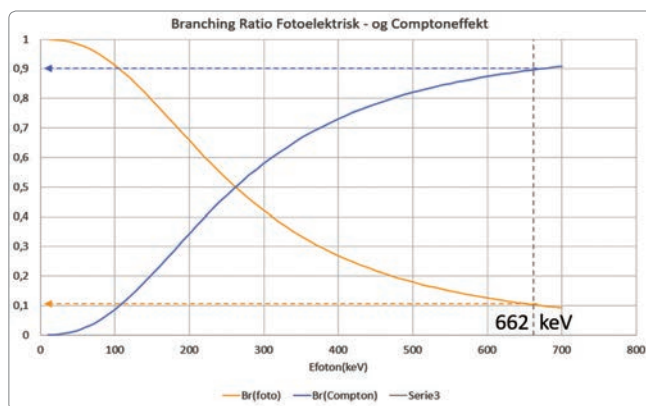
Når fotonen kan vekselvirke på to forskellige måder ved henholdsvis fotoelektrisk effekt og comptoneffekt, kan andelen af vekselvirkninger, der sker ved fotoelektrisk effekt, beregnes ud fra kendskab til de lineære absorptionskoefficienter. De relative andele kaldes branching ratios,  $Br$ , og er givet ved

$$Br_{\text{foto}}(E_\gamma) = \frac{\mu_{\text{foto}}(E_\gamma)}{\mu_{\text{tot}}(E_\gamma)}$$

og tilsvarende for comptoneffekt:

$$Br_{\text{Compton}}(E_\gamma) = \frac{\mu_{\text{Compton}}(E_\gamma)}{\mu_{\text{tot}}(E_\gamma)}$$

For  $E_\gamma = 662 \text{ keV}$  er andelen af vekselvirkninger ved fotoelektrisk effekt  $Br_{\text{foto}}(662 \text{ keV}) \cong 10 \%$  og tilsvarende for comptonspredning  $Br_{\text{Compton}}(662 \text{ keV}) \cong 90 \%$ , se Figur 5



Figur 5  
Branching Ratio for fotoelektrisk og comptoneffekt som funktion af fotonenergi (keV).

## Vinkel tæthedsfunktion for de spredte Compton fotoner

Comptontværsnittet for en spredt foton i retning fra  $\theta_1$  til  $\theta_2$  er givet ved integralet

$$\sigma_c(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, E_\gamma) \cdot \sin(\theta) d\theta$$

Da tværsnittet for en bestemt reaktion indgår i reaktionsraten  $R$  givet ved ligningen

$$R = I \cdot P(\text{reaktion}) = I \cdot n \cdot d \cdot \sigma$$

betyder det, at hvis man kun betragte comptonspredninger, så er sandsynligheden for, at den spredte foton fortsætter i retning fra  $\theta_1$  til  $\theta_2$  givet ved

$$\begin{aligned} P(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) &= \frac{\sigma_c(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2)}{\sigma_{\text{Ctot}}(E_\gamma)} \\ &= \frac{2\pi}{\sigma_{\text{tot}}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, E_\gamma) \cdot \sin(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Med en lille omskrivning er tæthedsfunktionen  $f(\theta, E_\gamma)$  således

$$\begin{aligned} P(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2\pi}{\sigma_{\text{Ctot}}(E_\gamma)} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, E_\gamma) \cdot \sin(\theta) d\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta, E_\gamma) d\theta \end{aligned}$$

hvor

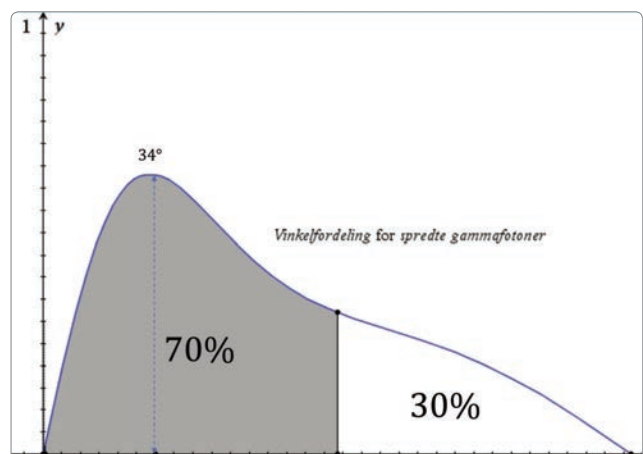
$$f(\theta, E_\gamma) = \frac{2\pi}{\sigma_c(E_\gamma)} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, E_\gamma) \cdot \sin(\theta)$$

Specielt fås, at

$$P(0 \leq \theta \leq \pi) = \int_0^\pi \frac{2\pi}{\sigma_{\text{Ctot}}(E_\gamma)} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, E_\gamma) \cdot \sin(\theta) d\theta = 1$$

På Figur 6 ses grafen for tæthedsfunktionen  $f(\theta, E_\gamma)$  for de comptonspredte fotoner med en indkommende fotonenergi  $E_\gamma = 662 \text{ keV}$ . Det ses, at ca. 70 % af de spredte comptonfotoner fortsætter fremad ( $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ) og dermed, at kun ca. 30 % spredes bagud ( $\pi \geq \theta \geq \pi/2$ ).

For de fremadspredte fotoner gælder, at de typisk spredes i retninger omkring  $34^\circ$ .



Figur 6  
Tæthedsfunktion  $f(\theta, E_\gamma)$  for spredte comptonfotoner med indkommende 662 keV foton. 70 % fortsætter fremad og 30 % bagud. For de fremadspredte fotoner er retningen typisk omkring  $34^\circ$ .

## Opsummering 1

Hvis en cylinderformet NaI-krystal ( $5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ ) bestråles isotropt med 1000 gammafotoner, hver med energien  $E_\gamma = 662 \text{ keV}$ , vil ca. 600 vekselvirke med krystallen og 400 passere uden vekselvirkning. Af de 600 fotoner, der vekselvirker, vil 90 % af dem, dvs. 540 vekselvirke ved compton-effekt og de resterende 60 ved fotoelektriske effekt.

Af de comptonspredte fotoner vil ca. 70 % dvs. ca. 380 fotoner fortsætte i retning fremad og 160 spredes bagud.

De indkommende fotoner ser i gennemsnit 3,3 cm NaI-krystal og vekselvirker typisk ca. 1,4 cm inde i krystallen.

## Kinetisk energitæthedsfunktion for de spredte comptonelektroner

Ved en comptonvekselvirkning mellem en indkommende foton med energien 662 keV, hvor den spredte foton fortsætter i retningen  $30^\circ$  overføres til comptonelektronen energien

$$T = E_\gamma - E_\gamma' \\ = 662 \text{ keV} \cdot \frac{\left(\frac{662 \text{ keV}}{511 \text{ keV}}\right) \cdot (1 - \cos(30^\circ))}{1 + \left(\frac{662 \text{ keV}}{511 \text{ keV}}\right) \cdot (1 - \cos(30^\circ))} = 98 \text{ keV}$$

og elektronen udsendes i retning (se Figur 2):

$$\cot(\phi) = \left(1 + \left(\frac{662 \text{ keV}}{511 \text{ keV}}\right)\right) \cdot \tan\left(\frac{30^\circ}{2}\right) \Rightarrow \phi = 58,4^\circ$$

Ved en tilsvarende regning, hvor fotonen fortsætter i retningen  $35^\circ$  fås

$$T = E_\gamma - E_\gamma' \\ = 662 \text{ keV} \cdot \frac{\left(\frac{662 \text{ keV}}{511 \text{ keV}}\right) \cdot (1 - \cos(35^\circ))}{1 + \left(\frac{662 \text{ keV}}{511 \text{ keV}}\right) \cdot (1 - \cos(35^\circ))} = 126 \text{ keV}$$

og en retning for comptonelektronen givet ved:

$$\cot(\phi) = \left(1 + \left(\frac{662 \text{ keV}}{511 \text{ keV}}\right)\right) \cdot \tan\left(\frac{35^\circ}{2}\right) \Rightarrow \phi = 54,1^\circ$$

Da sandsynligheden for, at en spredt foton spredes i retningen fra  $\theta_1 = 30^\circ$  til  $\theta_2 = 35^\circ$ , er

$$P(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) = \int_{30^\circ \cdot \frac{\pi}{180}}^{35^\circ \cdot \frac{\pi}{180}} f(\theta, E_\gamma) d\theta = 0,055 = 5,5\%$$

betyder det, at der også er 5,5 % chance for at finde en spredt

comptonelektron med energien i intervallet ca. 98 keV – 126 keV eller tilsvarende i retningen fra ca.  $54^\circ$  –  $58^\circ$ .

Der eksisterer derfor både en tæthedsfunktion for elektronretning og elektronenergi. Tæthedsfunktionen  $f_{\text{elek}}(T, E_\gamma)$  for elektronenergifordelingen skal nu findes.

Med udgangspunkt i vinkeltæthedsfunktionen

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta, E_\gamma) d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2\pi}{\sigma_{\text{Ctot}}(E_\gamma)} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, E_\gamma) \cdot \sin(\theta) d\theta$$

skal der i princippet blot gennemføres et variabelskift fra  $\theta$  til  $T$ , sådan at  $\theta$  erstattes af elektronens kinetiske energi  $T$  givet ved en relation  $\theta(T)$  alle steder, hvor  $\theta$  optræder i tæthedsfunktionen:

$$f(\theta, E_\gamma) \rightarrow f(\theta(T), E_\gamma)$$

og dernæst substitueres  $d\theta = \left(\frac{d\theta(T)}{dT}\right) \cdot dT$ :

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2\pi}{\sigma_{\text{Ctot}}(E_\gamma)} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, E_\gamma) \cdot \sin(\theta) d\theta \\ \rightarrow \int_{T(\theta_1)}^{T(\theta_2)} \frac{2\pi}{\sigma_{\text{Ctot}}(E_\gamma)} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta(T), E_\gamma) \cdot \sin(\theta(T)) \cdot \left(\frac{d\theta(T)}{dT}\right) \cdot dT \\ = \int_{T(\theta_1)}^{T(\theta_2)} f_{\text{elek}}(T, E_\gamma) dT \end{aligned}$$

hvor energitæthedsfunktionen  $f_{\text{elek}}(T, E_\gamma)$  for de spredte comptonelektroner er

$$f_{\text{elek}}(T, E_\gamma) = \frac{2\pi}{\sigma_{\text{Ctot}}(E_\gamma)} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta(T), E_\gamma) \cdot \sin(\theta(T)) \cdot \left(\frac{d\theta(T)}{dT}\right)$$

Ved nærmere eftersyn optræder vinkel  $\theta$  i det differentielle tværsnit *kun* i kombinationen  $\cos(\theta)$ , og den kan isoleres fra ligningen for elektronens energioverførsel

$$T = E_\gamma \cdot \frac{\alpha \cdot (1 - \cos(\theta))}{1 + \alpha \cdot (1 - \cos(\theta))} \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{(\alpha + 1) \cdot T - E_\gamma \cdot \alpha}{\alpha \cdot (T - E_\gamma)}$$

Hvad angår  $\frac{d\theta(T)}{dT}$  kan man alternativt beregne  $\frac{dT}{d\theta}$ , og udnytte, at

$$\frac{d\theta(T)}{dT} = \frac{1}{\left(\frac{dT}{d\theta}\right)}$$



og da  $\theta$ -afhængigheden er en  $\cos(\theta)$ -afhængighed,  $T(\theta) = T(\cos(\theta))$ , kan man yderligere simplificere beregningen ved

$$\begin{aligned}\frac{dT}{d\theta} &= \frac{dT}{d(\cos(\theta))} \cdot \frac{d(\cos(\theta))}{d\theta} \\ &= -\frac{E_\gamma \cdot \alpha}{(\cos(\theta) \cdot \alpha - \alpha - 1)^2} \cdot (-\sin(\theta)) \\ &= \frac{E_\gamma \cdot \alpha \cdot \sin(\theta)}{(\cos(\theta) \cdot \alpha - \alpha - 1)^2}\end{aligned}$$

Hermed fås, at kombinationen  $\left(\sin(\theta) \cdot \frac{d\theta}{dT}\right) | \theta \rightarrow \theta(T)$  reducerer til:

$$\begin{aligned}&\left(\sin(\theta) \cdot \frac{d\theta}{dT}\right) | \theta \rightarrow \theta(T) \\ &= \left(\sin(\theta) \cdot \frac{1}{\frac{E_\gamma \cdot \alpha \cdot \sin(\theta)}{(\cos(\theta) \cdot \alpha - \alpha - 1)^2}}\right) | \theta \rightarrow \theta(T) \\ &= \left(\frac{(\cos(\theta) \cdot \alpha - \alpha - 1)^2}{E_\gamma \cdot \alpha}\right) | \theta \rightarrow \theta(T)\end{aligned}$$

hvor man bemærker, at  $\sin(\theta)$  forsvinder fra udtrykket.

Energitæthedsfunktionen  $f_{\text{elek}}(T, E_\gamma)$  for de spredte compton-elektroner er dermed givet ved

$$\begin{aligned}f_{\text{elek}}(T, E_\gamma) &= \\ &\frac{2\pi}{\sigma_{\text{tot}}(E_\gamma)} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta(T), E_\gamma) \cdot \frac{(\cos(\theta) \cdot \alpha - \alpha - 1)^2}{E_\gamma \cdot \alpha} | \cos(\theta) \rightarrow T\end{aligned}$$

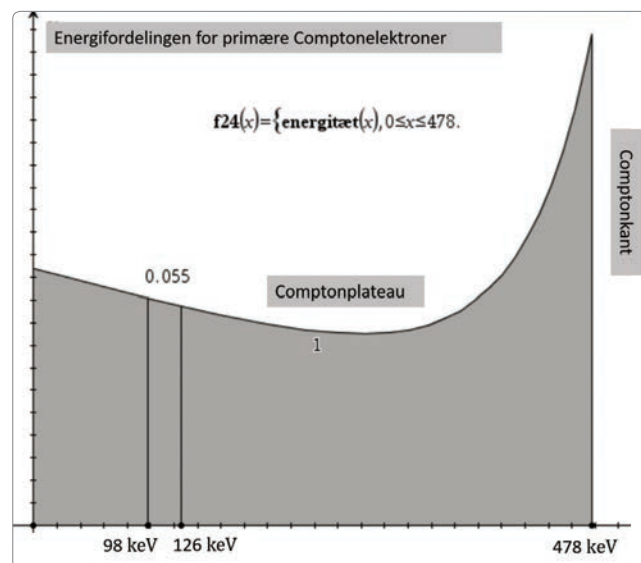
med substitutionen  $\cos(\theta) \rightarrow T$  givet ved ligningen

$$\cos(\theta) = \frac{(\alpha + 1) \cdot T - E_\gamma \cdot \alpha}{\alpha \cdot (T - E_\gamma)}$$

og det differentielle compton tværsnit

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta(T), E_\gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos(\theta)^2 + \frac{\alpha^2 \cdot (1 - \cos(\theta))}{1 + \alpha \cdot (1 - \cos(\theta))}}{1 + \alpha \cdot (1 - \cos(\theta))}$$

Med en gammafoton energi på 662 keV fås compton-elektron-energifordelingen for elektronenergier i intervallet fra 0 keV til den maksimale overførte energi 478 keV på Figur 7 nedenfor.



Figur 7

Comptonelektronenergifordeling med  $E_\gamma = 662$  keV.

Energifordelingen passer med den tidligere beregning af chancen for at finde en spredt compton-elektron med energien i intervallet 98 keV – 126 keV, nemlig 5,5 %.

Derudover udviser fordelingen nogle karakteristika, man observerer eksperimentelt, herunder comptonplateau samt comptonkant.

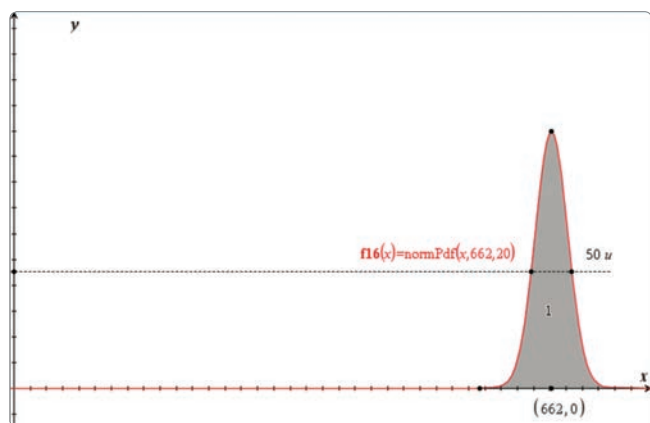
Comptonkanten udgør den markante top omkring maksimal energioverførsel 478 keV, der svarer til en Head-On kollision mellem den indkommende foton og en elektron. I den type sammenstød fortsætter compton-elektronen stort set i samme retning som retningen af den indkommende foton, der så til gengæld spredes bagud.

### Cs-137 gammaspektrum i NaI-detektor

Hvis en cylinderformet NaI-krystal (5 cm × 5 cm) bestråles isotropt med 1000 gammafotoner, hver med energien  $E_\gamma = 662$  keV, vil ca. 600 vekselvirke med krystallen og 400 passere uden vekselvirkning. Af de 600 fotoner, der vekselvirker, vil 90 % af dem, dvs. 540 vekselvirke ved compton-effekt og de resterende 60 ved fotoelektriske effekt.

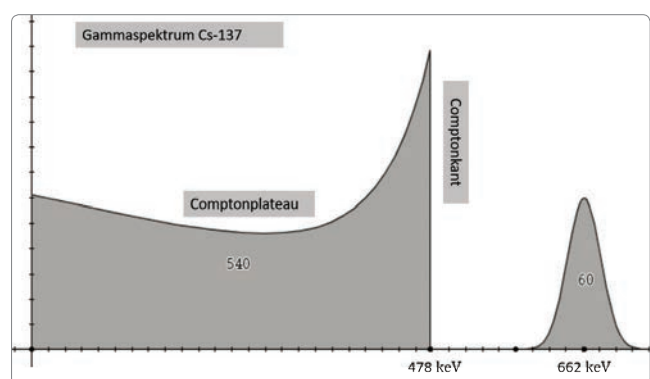
Fælles for de 600 elektroner, der løsriveres ved enten fotoelektrisk effekt eller comptonspredning, er, at de vekselvirker med krystallen og opbremses inden for ca. 1 mm afstand. Det betyder, at de stort set alle registreres i gammadetektoren, og dermed bidrager til fordelingen. Energifordelingen for compton-elektronerne ovenfor må derfor antages samtidig at repræsentere energifordelingen som gammadetektoren fremviser.

De 60 elektroner skabt ved fotoelektrisk effekt bidrager direkte til fototoppen, der matematisk set er en deltafunktion. Af flere årsager beskrives fototoppen imidlertid ved en normalfordeling med middelværdi 662 keV, og FWHM lig med ca. 50 keV.



Figur 8  
Normalfordeling for fototop 662 keV, FWHM = 50 keV.

Det samlede gammaenergisppektrum med antalsangivelser inkluderet er derfor:



Figur 9  
Gammaspektrum for NaI-detektor med gammafotonenergi  $E_\gamma = 662 \text{ keV}$  og kun primære vekselvirkninger.

## Konklusion

Gammaspektret ser umiddelbart fornuftigt ud med en karakteristisk fototop, en comptonkant samt et bredt og relativt fladt comptonplateau. Fototoppen er dog overraskende lille i sammenligning med comptonkanten, der til gengæld er relativt stor og meget skarp.

Det passer ikke med det, man observerer i et rigtigt gamma-spektrum, og derfor må der være flere bidrag til fototoppen som hidtil er negligeret, ligesom comptonkanten bør files til. Man bemærker i øvrigt også, at compton dalen, altså området mellem comptonkanten og fototoppen er helt tomt for registreringer, hvilket heller ikke passer med det eksperimentelle spektrum.

De ekstra bidrag til fototoppen kommer overvejende fra comptonprocesser med store energioverførsler til comtonelektronen og efterfølgende absorption af den tilbagespredte foton. Denne to-trinproces med dels en fremad spredt comtonelektron med stor energi samt en bagud spredt gammafoton med lille energi, der efterfølgende absorberes, kan tilsammen registreres som én fuldstændig fotoabsorption.

At netop denne proces bidrager til fototoppen skyldes, at de bagudspredte gammafotoner med stor sandsynlighed vekselvirker ved fotoelektrisk effekt, og ikke som de indkommende fotoner primært ved comptonspredning.

Faktisk viser beregninger, at fototoppen i det væsentlige består af bidrag fra disse to-vekselvirkninger, og dermed ikke som man skulle tro, de primære fotoelektriske vekselvirkninger. Det skal undersøges i næste artikel.