

# Cs-137 gammaspektrum inkl. sekundære vekselvirkninger

## Artikel 2

PETER KJELDEN, Rosborg Gymnasium

### Resume

Sekundære vekselvirkninger i NaI-krystallen vises nedenfor at kunne redegøre for både fototoppens og comptonkantens rette relative størrelser ved to-trin vekselvirkninger.

De tilbagespredte comptonfotoner absorberes overvejende ved fotoelektrisk effekt i NaI-krystallen, og de to næsten samtidige begivenheder registreres af detektoren som én samlet begivenhed. På den måde flyttes primære registreringer nær comptonkanten frem til fototoppen, hvormed styrkeforholdet passer rimeligt med det eksperimentelle gammaspektrum.

Yderligere viser beregninger, at comptonalden tillige tilføres registreringer ved sekundære comptonvekselvirkninger.

### Sekundære vekselvirkninger og fototoppen

Som tidligere beskrevet er brøkdelen af absorberede fotoner ved passage af et materiale med tykkelsen  $x$  givet ved

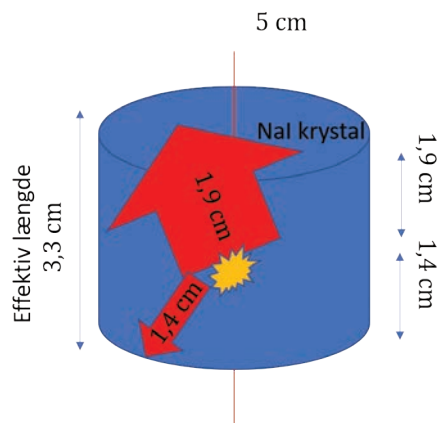
$$Abs(E_\gamma) = 1 - e^{-\mu_{\text{tot}}(E_\gamma) \cdot x}$$

hvor  $\mu_{\text{tot}}(E_\gamma)$  er den lineære absorptionskoefficient for materialet, der i det relevante energiinterval er givet ved to bidrag fra henholdsvis comptonspredning og fotoelektriske effekt:

$$\mu_{\text{tot}}(E_\gamma) = \mu_C(E_\gamma) + \mu_{\text{foto}}(E_\gamma)$$

Den effektive krystallængde for de indkommende fotoner er ca. 3,3 cm, og de vekselvirker typisk i afstanden 1,4 cm inde i NaI-krystallen. Da ca. 70 % af de spredte comptonfotoner spredes fremad og 30 % bagud, er det vægtede gennemsnit for den effektive krystallængde for de comptonspredte fotoner ca.

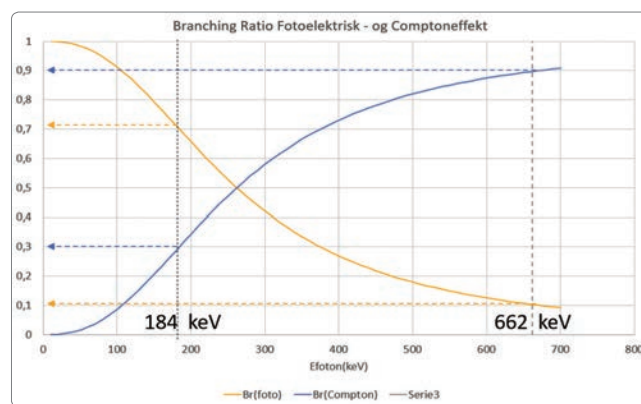
$$1,9 \text{ cm} \cdot 0,71 + 1,40 \text{ cm} \cdot 0,29 = 1,8 \text{ cm}$$



Figur 1  
Effektiv vejlængde for spredte comptonfotoner.

De fremadspredte fotoner har nogenlunde samme energi som de indkommende fotoner, og derfor er comptonspredning fortsat den dominerende vekselvirkning. De fremadspredte fotoner bidrager derfor ikke nævneværdigt til fototoppen ved sekundære vekselvirkninger.

Anderledes forholder det sig for de tilbagespredte fotoner. For en Head-On kollision gælder eksempelvis, at den tilbagespredte foton har energien 184 keV.

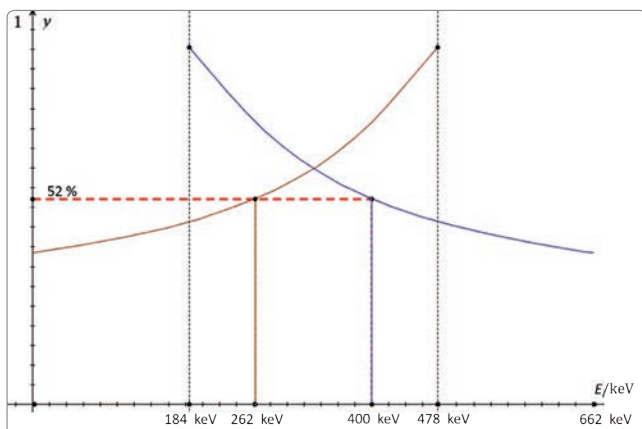


Figur 2  
Branching Ratio for fotoelektrisk- og comptoneffekt som funktion af fotonenergi (keV).

Kigger man nærmere på Figur 2 kan man se, at situationen her er præcis modsat situationen for de indkommende fotoner. For 184 keV fotoner er fotoelektrisk effekt den dominerende vekselvirkning med branching ratio ca. 70 % og kun 30 % for comptoneffekt. De tilbagespredte fotoner har derfor overvejende sandsynlighed for at absorberes ved fotoelektrisk effekt og dermed, sammen med den allerede skabte højenergetiske comptonelektron, bidrage til fototoppen.

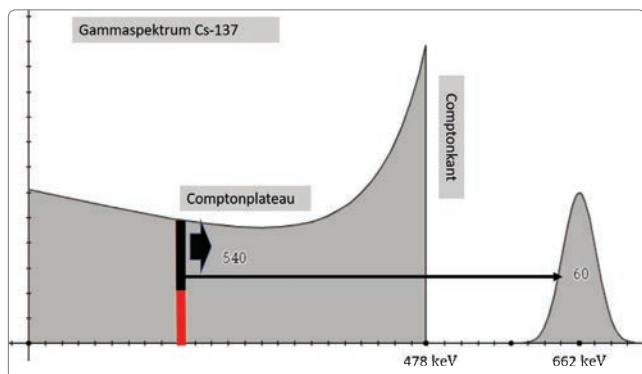
For alle sekundære vekselvirkninger, om det er ved fotoelektrisk effekt eller comptoneffekt, medfører det, at gammaspektret fra tidligere ændres. Sekundære absorptioner flytter registreringer fra comptonplateauet til fototoppen, og sekundære comptonspredninger flytter registreringer mod højere energier. Comptonplateau basisfordelingen består derfor kun af de primære registreringer, hvor den spredte foton ikke efterfølgende vekselvirker med krystallen.

På Figur 3 ses absorptionssandsynligheden for de spredte comptonfotoner som funktion af både fotonenergi samt den tilsvarende absorptionssandsynlighed som funktion af comptonelektronenergi.



**Figur 3**  
Absorptionssandsynlighed for sekundære vekselvirkninger for en middelvejlængde på 1,8 cm.

Eksempelvis for  $E_\gamma = 400$  keV er absorptionssandsynligheden med en middelvejlængde på 1,8 cm 52 %. Det betyder, at ca. halvdelen af de skabte compton elektroner med energien  $T = 662 \text{ keV} - 400 \text{ keV} = 212 \text{ keV}$  ikke registreres med energien 212 keV, men derimod en højere energi afhængig af den sekundære vekselvirkning. Den anden halvdel registreres ved energien 212 keV og indgår i det, der i det følgende betegnes basisfordelingen.

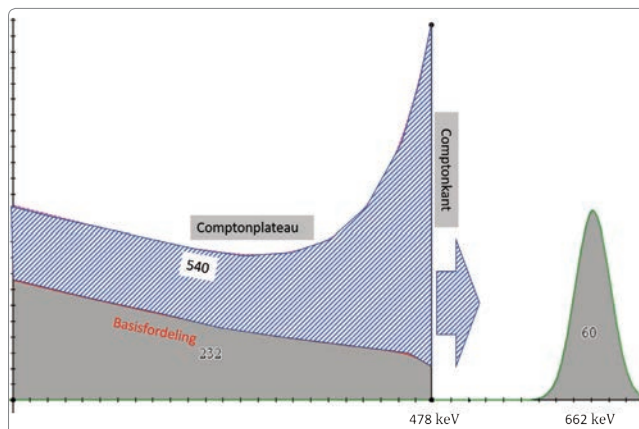


**Figur 4**  
Omtrent halvdelen af 262 keV primære registreringer flyttes til fototoppen og frem i comptonplateauet.

Basisfordelingen findes ved at fratrække alle registreringer med sekundære vekselvirkninger fra den oprindelige energitæthedsfunktion  $f_{\text{elek}}(T, E_\gamma)$ , hvor funktionen  $Abs_{1,8 \text{ cm}}(E_\gamma)$  er absorptionssandsynligheden som funktion af gammafotonenergien. Hvis registreringen har energien  $T$ , har den spredte comptonfoton energien  $E_\gamma = 662 \text{ keV} - T$

Basisfordeling( $T$ ) =

$$540 \cdot f_{\text{elek}}(T, E_\gamma = 662 \text{ keV}) \cdot (1 - Abs_{1,8 \text{ cm}}(662 \text{ keV} - T))$$



**Figur 5**  
Comptonplateau basisfordeling. Det skraveret område angiver de registreringer, der flyttes ved sekundære vekselvirkninger.

Antallet af tilbageværende registreringer reduceres til 232, hvilket betyder, at af de 540 spredte comptonfotoner, vil 308 efterfølgende vekselvirke sekundært med NaI-kristallen (skraveret område på Figur 5). Man bemærker yderligere, at særligt de højenergetiske registreringer nær comptonkanten forsvinder, idet de tilhørende lavenergetiske spredte gammafotoner for en stor dels vedkommende vekselvirker med kristallen.

Antallet af sekundære absorptioner ved fotoelektrisk effekt findes ved integralet

$$\int_{0 \text{ keV}}^{477,65 \text{ keV}} 540 \cdot f_{\text{elek}}(T, E_\gamma = 662 \text{ keV}) \cdot Abs_{1,8 \text{ cm}}(662 \text{ keV} - T) \cdot Br_{\text{foto}}(662 \text{ keV} - T) dT = 116$$

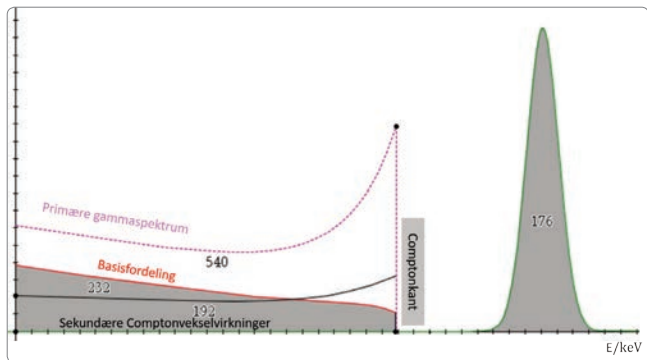
hvor branching ratio for fotoelektriske effekt fås ved

$$Br_{\text{foto}}(E_\gamma) = 1 - Br_{\text{Compton}}(E_\gamma)$$

De sekundære absorptioner bidrager dermed til fototoppen, der foruden de primære ca. 60 registreringer, nu består af i alt 176 registreringer.

For de sekundære comptonspredninger fås, at antallet er givet ved

$$\int_{0 \text{ keV}}^{477,65 \text{ keV}} 540 \cdot f_{\text{elek}}(T, E_\gamma = 662 \text{ keV}) \cdot Abs_{1,8 \text{ cm}}(662 \text{ keV} - T) \cdot Br_{\text{Compton}}(662 \text{ keV} - T) dT = 192$$



Figur 6  
Gammaspektrum korrigeret for sekundære fotoelektriske vekselvirkninger med energien af den indkommende gammafoton lig med  $E_\gamma = 662 \text{ keV}$ .

## Diskussion

Gammaspektret har som følge af de sekundære vekselvirkninger fået en markant kraftigere fototop. Fototoppen består nu af ca. 1/3 primære fotoelektriske absorptioner og 2/3 to-trins vekselvirkninger med først comptonspredning og efterfølgende fotoelektrisk effekt. De sekundære bidrag kommer hovedsageligt fra tilbagespredte comptonfotoner.

Comptonplateauet er fortsat uafklaret, idet de sekundære comptonvekselvirkninger, markeret med den sorte fordeling på Figur 6, vil flytte rundt på fordelingen mod højere energier. Når denne flytning er etableret, er comptonplateauet en sum af basisfordelingen og den korrigerede fordeling for de sekundære comptonspredninger.

## Sekundære comptonspredningers korrektion til comptonplateauet

Betragt tæthedsfunktionen for de registreringer i gammaspektret, hvis comptonspredte fotoner sekundært vekselvirker ved comptoneffekt (Figur 7).

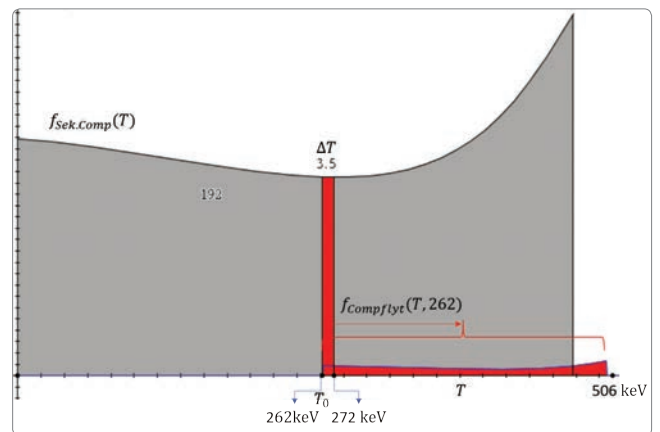
I energiintervallet fra 262 keV til 272 keV er der 3,5 registreringer. Med det energiinterval for de comptonspredte elektroner, har de tilhørende comptonspredte fotoner energier i intervallet fra 390 keV – 400 keV. Når 400 keV fotoner vekselvirker med en løst bundet elektron ved comptonspredning, vil de spredte elektroner have en energifordeling givet ved den tidligere bestemte energitæthedsfunktion  $f_{\text{elek}}(T, E_\gamma = 400 \text{ keV})$ , dog nu med energien for den indkommende foton lig med 400 keV.

Den sekundært spredte Comptonelektron vil have energier i intervallet fra 0 keV til  $T_{\max} = 244$  keV, og derfor vil de 3,5 registreringer fra intervallet 262 keV til 272 keV flyttes til intervallet fra 262 keV til 506 keV<sup>1)</sup>, se Figur 7.

Funktionen, der flytter de 3,5 registreringer fra intervallet 262 keV – 272 keV er givet ved

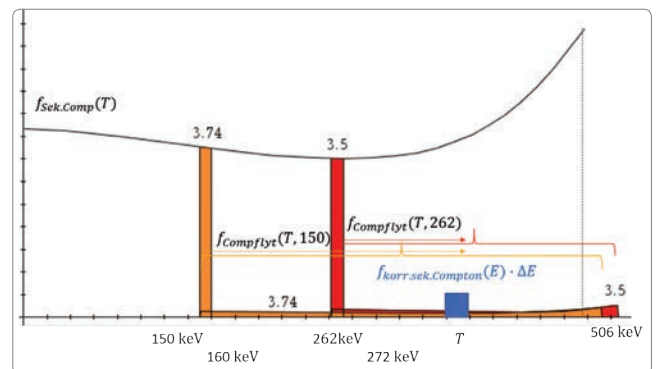
$$f_{\text{Compflyt}}(T, 262) = 3,5 \cdot f_{\text{elek}}(T - 262, E_{\gamma'} = 400)$$

for  $T \in [262; 506]$ .



Figur 7  
Sekundære comptonspredningers korrektion til comptonplateauet.

Den korrigerede sekundære Compton energitæthedsfunktion  $f_{\text{korr. sekundær Compton}}(T)$  er dermed givet ved bidrag fra alle de sekundære elektronenergifordelinger, der overlapper energien  $T$ , se Figur 8.



*Figur 8*  
*To bidrag til den korrigerede comptonenergitàethedsfunktion fra*  
*to sekundære elektronfordelinger.*

Hvis tæthedsfunktionen for de sekundære comptonspredninger kaldes  $f_{\text{Sek.Comp}}(T)$ , gælder at antallet af registreringer i intervallet fra 262 keV til 272 keV er givet ved et bestemt integral

$$3,5 = \int_{262 \text{ keV}}^{272 \text{ keV}} f_{\text{Sek.Comp}}(T) \cdot dT$$

$$^1) 262 \text{ keV} + T_{\max} (662 \text{ keV} - 262 \text{ keV}) = 262 \text{ keV} + 244 \text{ keV} = 506 \text{ keV}$$

Generelt er antallet af registreringer i intervallet  $[T, T + \Delta T]$  givet ved

$$f_{\text{Sek.Comp}}(T) \cdot \Delta T$$

Funktionen, der flytter registreringer fra intervallet  $[T_0, T_0 + \Delta T]$  er givet ved

$$f_{\text{Compflyt}}(T, T_0) = f_{\text{Sekund.Comp}}(T_0) \cdot \Delta T \cdot f_{\text{elek}}(T - T_0, E_{\gamma'} = 662 - T_0)$$

for  $T \in [T_0; T_{\text{max}}(662 - T_0)]$ .

Den korregerede sekundære comptonenergitalhedsfunktion  $f_{\text{kor. sekundær Compton}}(T)$  består nu af bidrag fra alle de sekundære fordelinger, der overlapper energien  $T$ .

Flyttefunktionen defineres derfor på ny, sådan at

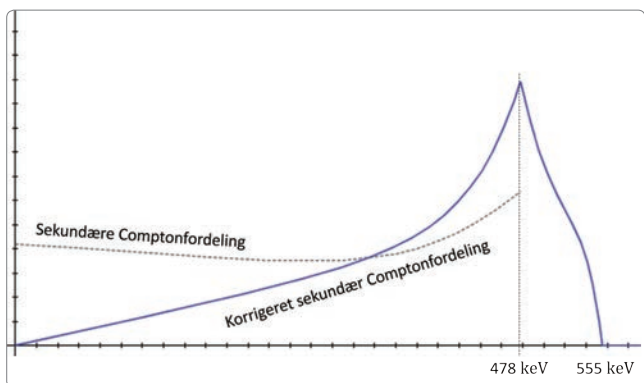
$$f_{\text{Compflyt}}(T, T_0) = \begin{cases} 0 & T < T_0 \\ f_{\text{Sekund.Comp}}(T_0) \cdot f_{\text{elek}}(T - T_0, E_{\gamma'} = 662 - T_0) & T_0 \leq T \leq T_0 + T_{\text{max}}(662 - T_0) \\ 0 & T > T_0 + T_{\text{max}}(662 - T_0) \end{cases}$$

i intervallerne  $\begin{cases} T < T_0 \\ T_0 \leq T \leq T_0 + T_{\text{max}}(662 - T_0) \\ T > T_0 + T_{\text{max}}(662 - T_0) \end{cases}$

og dermed fås den korregerede sekundære comptonenergitalhedsfunktion  $f_{\text{kor. sekundær Compton}}(T)$ :

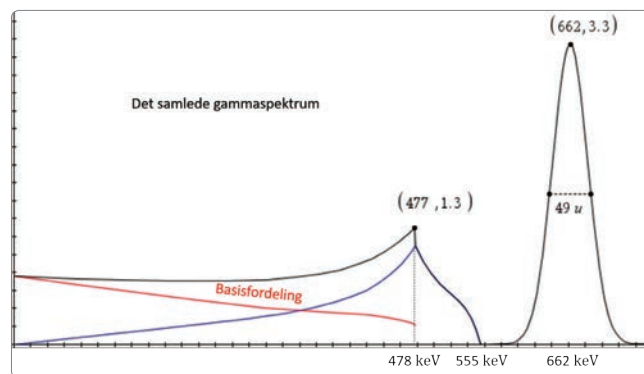
$$f_{\text{kor. sekundær Compton}}(T) = \int_0^{477.65} f_{\text{Compflyt}}(T, T_0) dT_0$$

hvor grænserne er de naturlige grænser for den primære comptonspredning, se Figur 9.



Figur 9  
Korregeret sekundær comptonantalsfordeling (fuldt optrukken) samt den primære sekundære comptonfordeling.

Da den korregerede sekundære comptonfordeling nu kendes, kan det samlede gammaspektrum bestemmes ved at addere basisfordelingen med den korregerede sekundære comptonfordeling samt fototoppen, se Figur 10.



Figur 10  
Gammaspektrum korregeret for sekundære vekselvirkninger med energien for de indkommende gammafotoner  $E_{\gamma} = 662 \text{ keV}$ .

## Konklusion

Gammaspektret korregeret for sekundære vekselvirkninger har flere interessante karakteristika. Dels er comptonplateauet overraskende fladt, og dels er comptonkanten fortsat markant, men endvidere forskudt ind i compton dalen, hvor der før ikke fandtes registreringer. De sekundære comptonspredninger har altså flyttet en del af den primære energifordeling, så comptonkanten har fået en skulderfordeling samt leveret et betragteligt bidrag til fototoppen.

Forholdet mellem tællertallene for toppen af fototoppen og comptonkanten er ca.  $\frac{3.3}{1.3} \approx 2.5$ , hvilket fortsat er i den lave ende, da man typisk observerer et forhold på omtrent 4 – 5. Omvendt udglattes tællingerne omkring comptonkanten ligesom i fototoppen i en fordeling af en vis bredde, hvilket sandsynligvis sænker toppen af comptonkanten og dermed øger forholdet. Sidst men ikke uvæsentligt gælder, at gammadetektoren ikke er lige effektiv for alle energier. Særligt for de lavenergetiske registreringer er effektiviteten højere end for de højenergetiske. Dette ødelægger helt sikkert det flade comptonplateau, og hæver det mod mindre energier.

Tilbage står nu kun at tilføje tilbagespredningstoppen, der ligesom fototoppen og comptonkanten udgør de mest markante elementer i gammaspektret.