

# Elektriske felter og overfladeladning

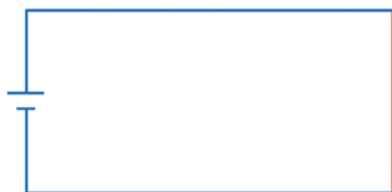
GUNNAR GUNNARSSON, Københavns VUC

Elektriske felter i og omkring elektriske kredsløb, hvori der løber strøm, nævnes sjældent i lærebøger. Disse felter udspringer fra de overfladeladninger, der eksisterer rundt omkring i kredsløbet. Overfladeladningerne nævnes også sjældent i den gængse litteratur. Det er uheldigt, da de udgør en vigtig brik i forståelsen af, hvordan spændingsfald forekommer forskellige steder i kredsløbet, hvad det er der får en elektrisk strøm til at løbe, og hvordan energiomsætningen foregår.

I artiklen vil jeg diskutere dette, og regne på sammenhængen mellem overfladeladningerne og de ydre og indre elektriske felter. Resultatet for overfladeladningerne vil jeg herefter bruge til at redegøre for energiomsætningen i kredsløbet.

## 1. Elektriske felter i strømførende ledere og resistorer

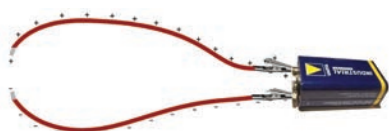
Vi betragter et simpelt kredsløb, med et batteri, ledninger og en resistor, fx en lang tynd tråd af kanthal. Resistorens resistans antages at være flere størrelsesordner større end ledningernes resistans.



Figur 1  
Kredsløb med kanthaltråd som resistor.

Da lederen med længden  $l$  har resistans  $R_{\text{led}} \neq 0$ , kræves der et elektrisk felt  $E_{\text{led}} = R_{\text{led}} \cdot I / l$  langs lederen, for at der kan løbe strøm igennem den. Ligeledes kræves der et elektrisk felt igennem resistoren,  $E_R = U / d$ , hvor  $d$  er resistorens længde. Der gælder at  $E_R \gg E_{\text{led}}$ .

Der er som bekendt kun to måder at skabe et elektrisk felt på: ved et varierende magnetfelt, og ved adskillelse af positive og negative ladninger. Det er tydeligvis det sidste, der er tilfældet her. Det er dog ikke umiddelbart indlysende, hvordan ladningsadskillelsen bidrager til fordelingen af de interne  $E$ -felter i kredsløbet. Det er her overfladeladningen kommer i spil. Hvis vi tilslutter ledninger til batteriets poler i et åbent kredsløb, vil der strømme ladninger fra polerne og ud i ledningerne. For at minimere coulombfrastødningen vil overskudsladningerne sætte sig på overfladen af ledningerne. (Det er ikke svært at overbevise eleverne om, at det er hvad der sker.)



Figur 2  
Overfladeladninger i åbent kredsløb.

Når en resistor tilsluttes, vil overfladeladningerne i en kort periode omfordele sig, indtil en stationær strøm er etableret i kredsløbet. Det indebærer en ophobning af ladninger i grænselaget mellem ledningerne og resistoren. Dette følger direkte af Gauss' lov, da fluxen er forskellig igennem de to endeflader af en passende kasse tegnet hen over grænselaget, som antydnet på figur 3.



Figur 3  
Det elektriske felt ændres når resistiviteten ændres.

Ladningen i grænselaget vil ikke blot sidde på overfladen, men i et tyndt lag i hele tværsnittet. Grænselagsladningen har en dobbelt funktion; at hæmme strømmen i henhold til resistorens resistans, og at levere via sin gradient, det nødvendige  $E$ -felt igennem resistoren.

Vi kan give et estimat på mængden af ladning i grænselaget i en typisk situation. Antag at resistoren er lavet af en 1 m lang kanthaltråd med radius  $a = 0,5$  mm. Da er resistansen  $R_{\text{tråd}} \cong 2 \Omega$ . Ledningerne er af kobber, også med længden 1 m, og vi antager, at de har samme radius som tråden og dermed en resistans ved stuetemperatur på omkring  $0,02 \Omega$ . Hvis spændingsfaldet over resistoren er 10 V, er det elektriske felt i resistoren  $E_R = 10$  V/m, og det elektriske felt i ledningen er  $E_{\text{led}} = 0,1$  V/m. Ladningen i grænselaget er ifølge Gauss lov

$$|Q| = \epsilon_0 \cdot (E_R - E_{\text{led}}) \cdot \pi \cdot a^2 \cong 7 \cdot 10^{-17} \text{ C}$$

svarende til  $4 \cdot 10^2$  elementarladninger. På den anden side indeholder en enkelt gitterkonstantstykke i kobberledningen af samme diameter  $2 \cdot 10^{13}$  ledningselektroner. Selvom grænselagsladningen således synes at være meget lille, er det ikke mængden som sådan, men *gradienten* i ladningen fra kobberledningen til resistoren, og igen fra resistoren til den anden kobberledning, der er afgørende for feltet.

Når en stationær strøm er etableret, vil det elektriske felt være parallelt med lederen. Dette vil gælde i hele kredsløbet, uanset hvordan ledningerne er formet. I alle tilfælde vil overfladeladningerne fordele sig så  $E$ -feltet kommer til at følge lederen, have en konstant værdi, så længe resistansen er konstant, og opnå den nødvendige gradient der, hvor resistansen ændres.  $E$ -feltet vil således være simpelt i hele kredsløbet, mens fordelingen af overfladeladninger kan være ret så kompliceret. Hvis man ændrer kredsløbets geometri, fx bøjer en ledning i en ret vinkel, vil overfladeladningerne omfordele sig for at

gøre feltet parallelt med lederen igen. En beregning (Rosser 1970) [1] viser, at der skal en overraskende lille ladning til, for at dreje feltet 90 grader. For en 1 A strøm i en kobberledning med tværsnitsarealet  $1 \text{ mm}^2$ , kræves der kun en enkelt ekstra elektron på ydersiden af cirkelbuen, for at dreje feltet! Udover at  $E$ -feltet er konstant langs lederen, så længe resistansen er konstant, vil det være konstant i et tværsnit af lederen, så længe lederen er lige. Hvis det ikke var tilfældet, ville det være muligt at danne en kurve, som den stiplede på figur 3, hvor  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$  i modstrid med Maxwell–Faradays lov. Hvis lederen krummer, vil  $E$ -feltet dog være størst inderst, netop for at overholde Maxwell–Faradays lov.

At feltet er parallelt med lederen, er en sandhed med minimal modifikation. Når der løber strøm i en leder, vil der også være et (meget lille) elektrisk felt på tværs af lederaksen. Som forklaret i en kort artikel (Matzek og Russel 1968) [2], stammer feltet fra den pinch-effekt, som magnetfeltet fra de strøm-mende ledningselektroner påvirker en given ledningselektron med. Det resulterer i en radial Halleffekt.

For en lang lige leder, med radius  $a$ , vil  $B$ -feltet i afstanden  $r < a$  fra centrum, være givet ved  $B = \mu_0 \cdot I \cdot r / (2\pi \cdot a^2)$  og størrelsen af Hall-feltet, hvis retning er fra overfladen og mod lederaksen, findes af

$$E_{\text{Hall}} = v \cdot B = \frac{v \cdot \mu_0 \cdot I \cdot r}{2\pi \cdot a^2}$$

hvor  $v$  er elektronernes driftfart. Hall-feltet kan maksimalt have størrelsen  $E_{\text{Hall,max}} = v \cdot \mu_0 \cdot I / (2\pi \cdot a)$ . Med de værdier vi har anvendt i eksemplet fra før for kobberlederen, fås  $E_{\text{Hall,max}} \cong 10^{-6} \text{ V/m} \ll E_{\text{led}}$ . For, at det elektriske felt skal være parallelt med den stationære strøm, må Ohms lov,  $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$ , i princippet modificeres ved kun at inkludere parallelkomponenten af  $E$ -feltet.

Overfladeladning i strømførende kredsløb ser som sagt ud til at leve et meget stille liv i undervisningslitteraturen. Så vidt jeg kan se, er den først nævnt af Weber omkring 1850. I Sommerfelds bog *Electrodynamics* (Sommerfeld 1952) [3] gives problemet en grundig behandling, og overfladeladningsfordelingen for en uendelig lang strømførende leder diskuteres. J. D. Jackson bringer også en klarhed over fænomenet i sin artikel *Surface charges on circuit wires and resistors play three roles* (Jackson 1996) [4]. De tre roller er: (1) at vedligeholde potentialet rundt omkring i kredsløbet, (2) at levere det elektriske felt i området omkring kredsløbet, og (3) at sørge for, at den elektriske strøm følger ledningernes krumning.

Overfladeladningen i kredsløb kan demonstreres, som forklaret i en artikel (Härtel 2012) [5] og vist i en video fra [physlab.org](http://physlab.org) [6]. Da overfladeladningen er meget lille, og elektrostatiske induktion altid vil skabe en tiltrækning mellem et ladet objekt

og et neutralt objekt, kræver eksperimentet både højspænding og afskærmning fra omgivelserne.

I en interessant artikel *A unified treatment of electrostatics and circuits* (Sherwood and Chabay 2016) [7] kritiserer forfatterne den traditionelle måde ellæren behandles på i de indledende kurser på universiteter, hvor der skelnes skarpt mellem statiske problemer, som analyseres ud fra ladninger og Coulombs lov, mens disse er helt fraværende ved analyse af kredsløb. De rapporterer om gode resultater ved at behandle begge problemtyper på en forenet måde. De to har også skrevet en lærebog, *Matter and interactions*, hvor dette synspunkt skulle være fremtrædende.

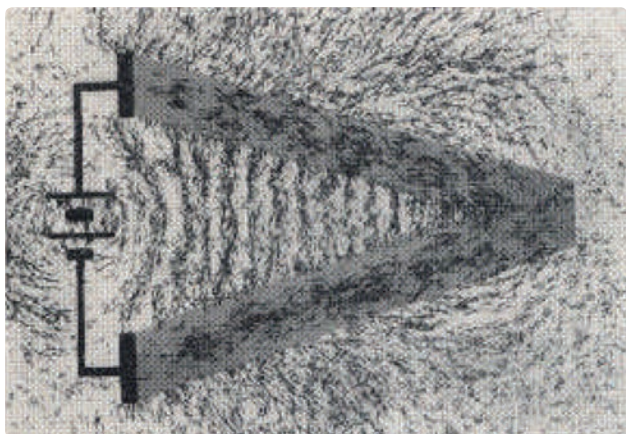
En almindelig hverdagsforestilling blandt eleverne er, at en elektrisk strøm virker ved, at elektronerne skubber til hinanden som vandmolekyler i en haveslange. Den forklaring går dog ikke, da den elektriske leder i gennemsnittet er neutral indvendigt. Men en passende fordelt overfladeladning kan generere det nødvendige  $E$ -felt for at drive strømmen.

Overfladeladningen giver også en anden måde at behandle det vanskelige begreb spændingsfald på. Når en elev spørger, ”hvad er forskellen på den ene og den anden side af resistoren i kredsløbet?”, kan man tage udgangspunkt i noget i retning af: Der er en ophobning af hhv. positive og negative (overflade- eller grænselags) ladninger på hver sin side af resistoren. Alle steder, hvor der er en gradient i overfladeladningen, siges der at være et spændingsfald. Det er også nærliggende i den sammenhæng at inddrage det elektriske felt som begreb. Uanset hvordan det formuleres, er pointen den, at spændingsfaldet her knyttes til en lokal fysisk størrelse, uden behov for at hænge det op på en analogi.

Jeg synes ikke et svar som ”elektronerne har mistet potential-energi” forklarer ret meget. I værste fald giver det anledning til misforståelser som, at ”elektronerne skal lades op i batteriet før de kan omsætte energi i resistoren”. I sidste afsnit vil jeg diskutere energiomsætning i en feltmodel for det elektriske kredsløb.

## 2. Elektriske felter omkring strømførende ledere

I området omkring strømførende ledere, vil der også være et elektrisk felt. Det udspringer fra overfladeladningerne. Dette blev for første gang demonstreret ved at sætte højspænding til et kredsløb, hvor ledermaterialet var blæk, malet på en glasplade (Jefimenko 1962) [8]. Græsfrø, retter sig efter det elektriske felt, så feltet kan kortlægges. Figur 4 viser en af opstillingerne brugt af Jefimenko. Det er tydeligt hvordan feltlinjerne, mere eller mindre, er på tværs af lederne uden for kredsløbet, mens det indre felt er langs lederne.



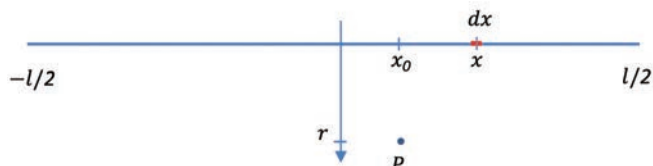
Figur 4  
Jefimenkos demonstration af elektriske felter.

I det følgende vil jeg regne på det elektriske felt i området mellem de to parallelle (kobber)ledere i et kredsløb som på figur 1. Målet er at komme med en vurdering af ladningstætheden på overfladen af lederne. Ved beregningerne antages, at afstanden mellem lederne er meget større end ledernes radius, så polariseringseffekter er ubetydelige. Da vil overfladeladningstætheden  $\sigma(x)$  (målt i  $C/m^2$ ) være konstant i et tværsnit af lederen, og kan udtrykkes ved linjeladningstætheden  $\lambda(x)$  (målt i  $C/m$ ) idet

$$\lambda(x) = 2\pi a \cdot \sigma(x) \quad (1)$$

Det antages endvidere, at ladningstætheden er konstant langs lederen. Det kan begrundes med, at det elektriske felt i kobberlederne er svagt. Endelig ser vi bort fra effekten af naboledninger og spændingskilden i kredsløbet. Indflydelsen af naboledninger kommer vi ind på i næste afsnit.

Vi begynder med at se på en enkelt leder med længden  $l$  og ladningstætheden  $\lambda$  og beregner størrelsen af  $E$ -feltet i punktet  $P(x_0, r)$ .



Figur 5  
Beregning af det elektriske felt tæt på en lang lige leder.

Feltet vil både have en radial komponent  $E_r$ , og en tangentiel komponent  $E_t$ . Disse kan findes ved at benytte Coulombs lov for den infinitesimale ladning inden for  $dx$  og integrere over  $x$ . For den radiale komponent fås, idet feltet projiceres på de to retninger

$$\begin{aligned} dE_r &= \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^2 + r^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{(x-x_0)^2 + r^2}} \\ &= \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{((x-x_0)^2 + r^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Og for den tangentielle komponent fås

$$\begin{aligned} dE_t &= \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^2 + r^2} \cdot \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + r^2}} \\ &= \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x-x_0}{((x-x_0)^2 + r^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Integration fra  $-l/2$  til  $l/2$  giver

$$\begin{aligned} E_r(r, x_0) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot \left( \frac{l/2 - x_0}{\sqrt{(l/2 - x_0)^2 + r^2}} + \frac{l/2 + x_0}{\sqrt{(l/2 + x_0)^2 + r^2}} \right) \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_t(r, x_0) &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{(l/2 - x_0)^2 + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{(l/2 + x_0)^2 + r^2}} \right) \quad (3) \end{aligned}$$

Vi ser, at i grænsen for en uendelig lang leder, vil  $E_t$  gå mod nul som forventet, og  $E_r$  nærme sig det velkendte resultat, som også nemt kan udledes fra Gauss' lov:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Vi vil nu tillade os at bruge denne lidt enklere funktion, til at beregne spændingsforskellen mellem de to parallelle ledere med samme numeriske ladningstæthed, men med modsat fortegn for ladningerne. Hvis afstanden mellem lederne er  $d$ , vil det samlede felt i et punkt mellem lederne, i afstanden  $r$  fra den ene leder og afstanden  $d-r$  fra den anden, være

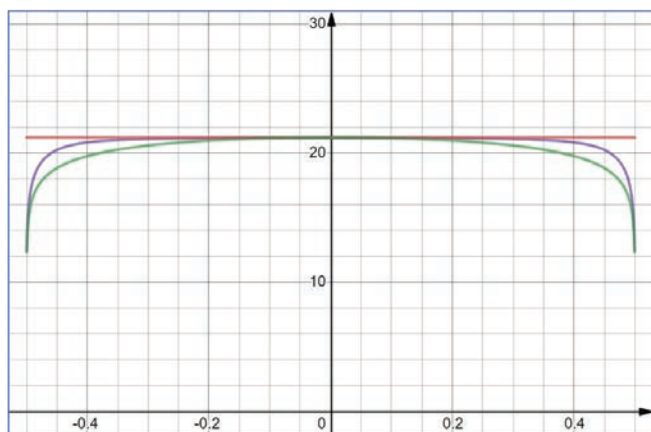
$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{d-r} \right) \quad (5)$$

For at finde spændingsforskellen mellem lederne, skal vi integrere  $E(r)$  fra den ene leder til den anden. Her skal vi være forsigtige, da integralet vil divergere i  $r=0$  og  $r=d$ . Men lederne er jo heller ikke uendelig tynde. Hvis de har radius  $a$ , bliver udtrykket for spændingsfaldet

$$\begin{aligned} U &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \int_a^{d-a} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{d-r} \right) dr \\ &= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{d-a}{a} \right) \cong \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{d}{a} \right) \quad (6) \end{aligned}$$

idet lederne er meget tynde i forhold til afstanden imellem dem. (Af symmetri Grunde kunne vi have betragtet én leder og ganget resultatet med 2.)

I de her CAS-tider er det naturligvis ikke særligt arbejdskrævende at bruge det fulde udtryk for  $E_r(r, x_0)$ . Dermed vil vi få et spændingsfald, der ikke helt er uafhængig af position langs lederen pga. svækkelsen af det radiale  $E$ -felt ved enderne. Fejlen er dog til at overse. Figur 6 viser grafer for  $U(r, x_0)$  i enheder af  $\lambda / (4\pi\epsilon_0)$  sammen med det konstante spændingsfald mellem to uendelig lange ledere. Det er kun alleryderst at tilnærmelsen fejler. Graferne er tegnet for typiske laboratoriesituationer, hvor hver leder har længden  $l = 1$  m, radius er  $a = 0,5$  mm, og afstanden mellem dem er hhv.  $r = 10$  cm (blå kurve) og  $r = 1$  m (grøn kurve).



Figur 6  
Spændingsfaldet mellem endelige og uendelig lange lige ledere.

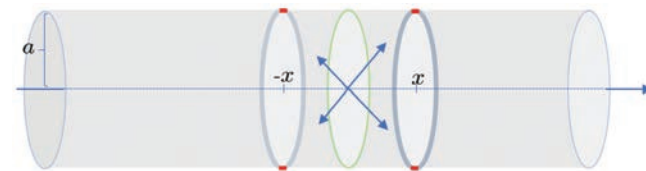
Med  $a = 0,5$  mm,  $d = 1$  m,  $l = 1$  m og et spændingsfald på 10 V, finder vi ladningstætheden af ligning (6),  $\lambda \approx 3,7 \cdot 10^{-11}$  C/m, svarende til lidt over  $10^5$  elementarladninger pr. mm.

Til sammenligning indeholder 1 mm af kobberledning med denne tykkelse  $7 \cdot 10^{19}$  ledningselektroner, så der er af størrelsesordenen 1 overfladeelektron pr.  $10^{14}$  ledningselektroner.

### 3. Gradienten i overfladeladningen

Vi skal nu kigge nærmere på det interne elektriske felt, altså feltet i lederne. Ved estimatet af overfladeladningen antog vi, at denne var konstant i hele længden af lederen. Af symmetri Grunde vil en konstant overfladeladning ikke kunne skabe det nødvendige elektriske felt for at drive strømmen igennem lederen. Hvis ladningen var konstant, ville en elektron inde i lederen nemlig ikke føle nogen nettokraft fra overfladeladningerne. Denne symmetri brydes, hvis der er en gradient i overfladeladningen, som antydtes i figur 7. Vektorpilene illustrerer den elektriske kraft på en elektron, der befinder sig på symmetriaksen, fra ladninger i to tværsnit i samme afstand fra elek-

tronen. Da der er en større positiv ladningstæthed til højre, vil det give en resulterende kraft mod højre.



Figur 7  
Gradient i overfladeladning skaber det nødvendige elektriske felt i lederen.

Vi vil nu gå ud fra, at ladningstæthederne  $\sigma(x)$  og  $\lambda(x)$  vokser lineært. I næste afsnit vil vi vise, at det giver et nogenlunde konstant elektrisk felt i betydelige dele af lederen. Men her vil vi beregne hvilken gradient det kræver, for at skabe dette næsten konstante felt.

For at gøre beskrivelsen lidt enklere, regner vi på en leder, som er symmetrisk i forhold til plus- og minuspole, med en negativ ladning for  $x < 0$  og en positiv ladning for  $x > 0$ . Det svarer til at betragte kanthaltråden i det indledende eksempel. Ladningstætheden kan udtrykkes ved

$$\lambda(x) = \frac{\Delta\lambda}{l} \cdot x \quad (7)$$

hvor  $\Delta\lambda = \lambda(l/2) - \lambda(-l/2)$  og  $l$  er lederens længde.

Vi vil starte med at beregne størrelsen  $E(0)$  af  $E$ -feltet i lederens midtpunkt. Resultatet bruges til at finde gradienten af overfladeladningen i centrum af lederen.

Bidraget til det elektriske felt i midten af lederen fra en ring af ladning i afstanden  $x$  langs symmetriaksen findes vha. Coulombs lov, hvor vi projicerer feltet ind på symmetriaksen

$$\begin{aligned} dE &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda(x)dx}{x^2 + a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ &= \frac{\Delta\lambda}{4\pi\epsilon_0 l} \cdot \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \cdot dx \end{aligned}$$

Størrelsen af  $E$ -feltet i  $x = 0$  er

$$E(0) = \frac{\Delta\lambda}{4\pi\epsilon_0 l} \cdot I(0) \quad (8)$$

hvor  $I(0)$  er integralet

$$I(0) = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx$$

Gradienten i ladningstætheden er derfor

$$\frac{\Delta\lambda}{l} = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{E(0)}{I(0)} \quad (9)$$



For kanthaltråden, hvor  $l=1$  m,  $a=0,5$  mm og  $E(0)=10$  V/m fås

$$I(0) = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx \cong 13,2$$

Dermed er

$$\frac{\Delta\lambda}{l} \cong 8,4 \cdot 10^{-11} \text{ C/m}^2$$

I forrige afsnit fandt vi ladningstætheden,  $\lambda_{\text{Cu}} = \pm 3,7 \cdot 10^{-11}$  C/m på de to kobberledninger. Ladningen går fra positiv til negativ værdi igennem den 1 m lange kanthaltråd. Altså svarer det til en gennemsnitlig gradient igennem kanthaltråden på  $7,4 \cdot 10^{-11}$  C/m<sup>2</sup>, hvilket stemmer fint med beregningerne ovenfor.

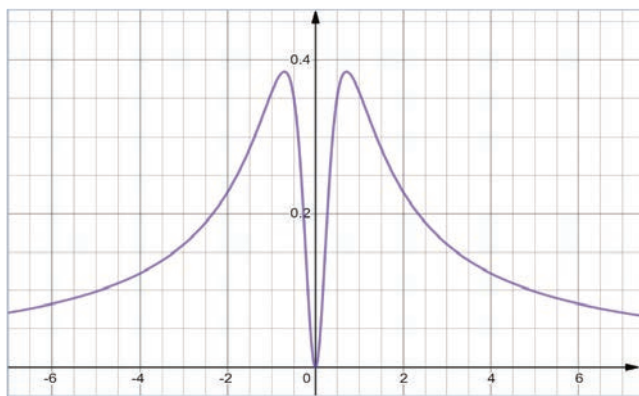
Der vil også være en (svag) gradient i kobberledningerne, men den er 100 gange mindre end i kanthaltråden, da feltet er 100 gange svagere. Derfor har vi kun begået en ubetydelig fejl ved at regne med konstant ladningstæthed i forrige afsnit.

#### 4. Feltet uden for lederens centrum

Før vi beregner  $E$ -feltet i andre punkter langs lederens symmetriakse, kigger vi nærmere på funktionen

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Figur 8 viser grafen for  $f$ , hvor  $x$  er i enheder af  $a$ .



Figur 8

På et givet sted i ledere bidrager ladninger tæt på mest til det elektriske felt.

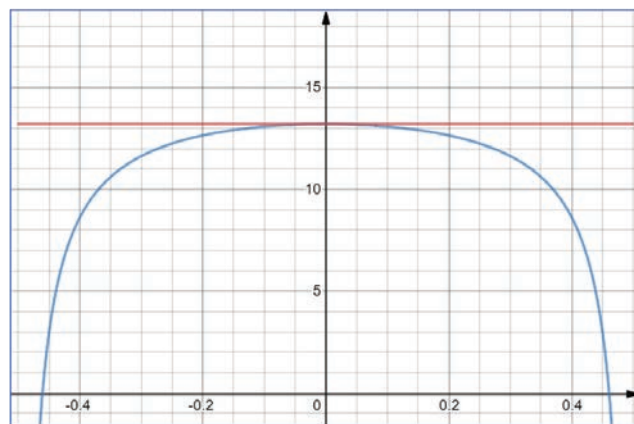
$f$  har et skarpt maksimum i  $x = \pm \sqrt{2} \cdot a$ , som i praksis blot er ca. 1 mm fra centrum, og  $f(x) \approx 1/x$  langt fra centrum. En betydelig del af integralet kommer fra nærområdet når forholdet  $l/2a$  er stort. En uendelig lang leder giver dog ikke nogen mening i denne sammenhæng, da  $|\lambda(x)| \rightarrow \infty$  for  $x \rightarrow \pm\infty$ , og integralet divergerer logaritmisk.

Ved beregning af  $E$ -feltets størrelse i et punkt  $x_0 \neq 0$  på symmetriaksen, er integranden ikke længere en lige funktion. Dog vil det stadigvæk gælde, at væsentlige bidrag til feltet kommer fra området omkring  $x_0$ . Vi forventer derfor at

$$I(x_0) = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{x \cdot (x - x_0)}{((x - x_0)^2 + a^2)^{3/2}} dx \quad (10)$$

er en langsomt varierende funktion af  $x_0$ , når  $x_0$  ikke er for tæt på lederens ende. Figur 9 viser grafen for  $I(x_0)$  samt  $I(0)$ .

Vi kan konkludere, at med  $\lambda(x)$  som en lineær funktion, fås et nogenlunde konstant elektrisk felt i de centrale dele af ledere. Når vi nærmer os endepunkterne fejler approksimationen dog helt.



Figur 9

Grafen for  $I(x)$  og  $I(0)$ .

Ved at erstatte den lineære funktion med fx et tredjegradspolynomium, er der flere parametre at skrue på, hvilket vil resultere i et næsten konstant felt længere ud til siderne. Dette er dog ikke hovedproblemet. Vi har nemlig ikke taget hensyn til ladningerne i de to kobberledninger rundt om hjørnet, som naturligvis bidrager til feltet nær lederens ende. Det er på tide at kigge på det.

For at beregne bidraget  $E_2(x)$  fra de to kobberledninger, kan vi tage udgangspunkt i ligning (2) for det radiale  $E$ -felt uden for en leder, hvor vi sætter  $x_0 = l/2$ . I ligning (2) er  $r = x$  nu koordinaten langs kanthaltråden. Ved at tage højde for, at der er to ledere adskilt af afstanden  $l$  (alle tre ledere har længden  $l$ ) fås, idet kanthaltrådens midtpunkt er i  $x = 0$ :

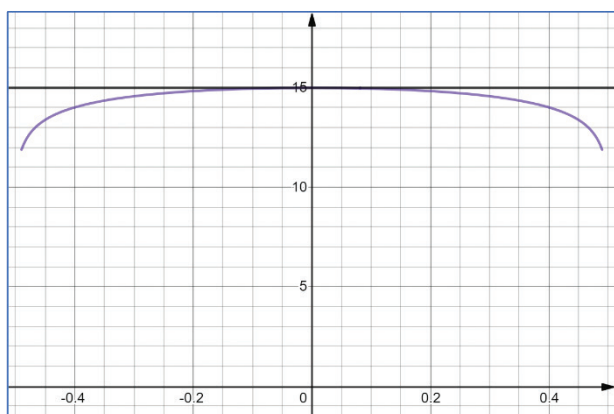
$$E_2(x) = \frac{\lambda \cdot l}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{l^2 + (x + l/2)^2}} \right) \cdot \frac{1}{x + l/2} - \left( \frac{1}{\sqrt{l^2 + (x - l/2)^2}} \right) \cdot \frac{1}{x - l/2} \right] \quad (11)$$

Dette felt skal lægges til feltet fra før

$$E_1(x) = \frac{\Delta\lambda}{4\pi\epsilon_0 l} \cdot I(x) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 l} \cdot I(x) \quad (12)$$

hvor vi har udnyttet, at  $\Delta\lambda = \lambda - (-\lambda) = 2\lambda$ .

Figur 10 viser grafen for det samlede felt  $E_1(x) + E_2(x)$  i enheder af  $\lambda / (4\pi\epsilon_0 l)$ . I beregningen har vi undgået den yderste cm i hver ende af lederen. Approximationen er langt bedre nu. Det er kun i de yderste 10 % af lederen, at afvigelsen bliver markant. Bemærk også, at feltet i centrum af lederen er hævet lidt, fra 13,2 til 15. Det betyder også, at gradienten igennem kanthaltråden bliver mindre, nemlig  $7,4 \cdot 10^{-11} \text{ C/m}^2$ , i stedet for de tidligere  $8,4 \cdot 10^{-11} \text{ C/m}^2$ . Altså passer det endnu bedre med beregningen i afsnit 2. Problemerne i enderne hænger sammen med komplikationerne i hjørnerne, bl.a. grænselagsladning.

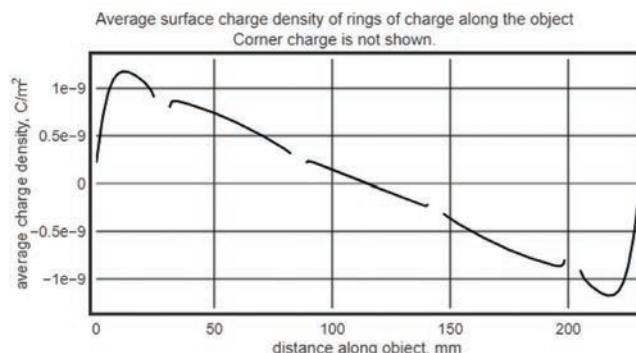
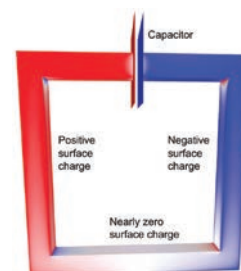


Figur 10  
Grafen for  $I(x)$  når der er tages hensyn til ladninger fra naboledninger.

## 5. Sammenligning med numeriske beregninger

I en artikel (Chabey and Sherwood 2019) [9] udføres numeriske beregninger på forskellige slags kredsløb, der minder om det, vi har gang i. Af grunde, som jeg ikke har indblik i, laves de numeriske beregninger for ledere med kvadratisk tværsnit. Her er et eksempel fra artiklen: Ledninger lavet af nichrom-legering hele vejen rundt, med  $4 \text{ mm}^2$  tværsnit og en længde på 230 mm. Kredsløbet er drevet af en kapacitor med meget høj kapacitet, så spændingsfaldet er nærmest konstant, 1,5 V. Det giver et elektrisk felt på  $7 \text{ V/m}$ , altså sammenligneligt med de  $10 \text{ V/m}$  i eksemplet med kanthaltråden. Figur 11 er taget fra artiklen, og viser den resulterende fordeling af overfladeladning. Det overordnede billede er som forventet, men bemærk på farverne, hvordan der både ved hjørnerne og ved kapacitoren dannes lommer med "det forkerte" fortegn for ladning. Desuden er der synlige polariseringseffekter; ladningstætheden er ikke helt konstant i et givet tværsnit pga. indflydelse fra andre dele af kredsløbet.

Figur 11  
Numeriske beregninger af overfladeladning.



Af kurven kan vi se, at gradienten i overfladeladningen på hver af de tre lange lige ledere er nogenlunde konstant, på nær hjørnerne som ikke er med. Af figuren kan gradienten på lederen i midten aflæses til at være

$$\frac{d\sigma}{dx} \cong \frac{0,5 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2}{0,05 \text{ m}} = 10^{-8} \text{ C/m}^3$$

I vores kanthal-eksempel var  $\Delta\lambda/l = 7,4 \cdot 10^{-11} \text{ C/m}^2$ . Det giver for overfladeladningstætheden

$$\frac{\Delta\sigma}{l} = \frac{\Delta\lambda}{2\pi a \cdot l} \cong 2,4 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^3$$

Det er en smule højere, men af samme størrelsesorden som i de numeriske beregninger. Kanthaltrådens omkreds var også under det halve af omkredsen her, og feltet lidt større.

## 6. Energiomsætning i kredsløbet

I det bemærkelsesværdige Kapitel 27 i bind II i *Feynman lectures on physics* [10] gennemgås bevægelsesmængde og energi i det elektromagnetiske felt, hvilket bygger på poyntingvektoren

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (13)$$

Feynman betragter en leder med resistans, hvori der løber strøm. Der er magnetfelt rundt om lederen, og et elektrisk felt inde i lederen, ensrettet med strømrretningen. Af randbetingelserne for det elektriske felt, nemlig at tangentialkomponenten  $E_t$  er kontinuert hen over grænsen, må  $E_t$  også eksistere lige uden for lederen. Heraf følger, at poyntingvektoren har retning radialt ind i lederen og fortolkes som effektstrømtætheden udefra og ind i lederen. Diskussionen efter udledelsen er

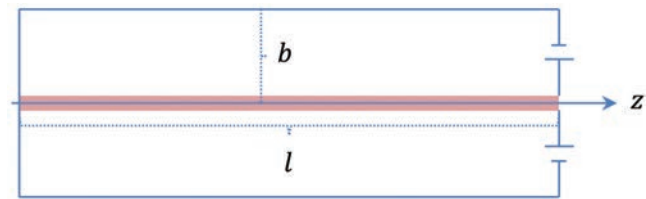
interessant: "So our "crazy" theory says that the electrons are getting their energy to generate heat because of the energy flowing into the wire from the field outside. Intuition would seem to tell us that the electrons get their energy from being pushed along the wire, so the energy should be flowing down (or up) along the wire. But the theory says that the electrons are really being pushed by an electric field, which has come from some charges very far away".

Især den sidste sætning tyder på, at Feynman ikke har været vidende om overfladeladningen og derfor har manglet en afgørende brik i årsagssammenhængen. 10 år tidligere havde Sommerfeld dog udgivet sin bog, *Electrodynamics* [3]. Et af kapitlerne handler om felter omkring strømførende ledere. Her udleder Sommerfeld vha. overfladeladninger, sammenhængen mellem poyntingvektoren og energiomsætning i en uendelig lang leder med polerne i  $\pm\infty$ . Med Sommerfelds ord: "Outside the wire energy flows from the electrodes  $z = \pm\infty$  from all sides towards the surface of the wire. After entering it it flows radially towards the axis of the wire, being converted at the same time into heat. There is no energy flux parallel to the wire axis within the wire." Og videre: "The conductors are nonconductors of energy. Electromagnetic energy is transported without loss only in nonconductors." Altså, da  $\vec{S} \perp \vec{E}$  har poyntingvektoren ikke nogen komponent langs lederen inde i lederen, og dermed er der ikke nogen aksiel energistrøm inde i lederen.

I sin artikel (Jackson 1996) [4], regner Jackson på poyntingvektoren i sit specielle kredsløb. Han finder frem til en effektstrømtæthed som i væsentlig grad løber tæt på lederen. Men også, at placeringen af batteriet i forhold til resistoren har betydelig indflydelse på energiflowet.

I en artikel (Habola 2010) [11] betragter forfatteren et langt coaxkabel. Det er et interessant eksempel, da felterne og dermed poyntingvektoren er nul uden for kablet, hvilket gør energiflowet overskueligt. Beregningerne med nogle tilføjelser gives her, hvorefter vi regner på effektstrømtætheden i kredsløbet med kanthaltråden.

Vi betragter et coaxkabel hvor det indre kabel har radius  $a$ , og resistans  $R$ , og det ydre kabel er en tynd skal med radius  $b$ , men har resistansen nul. Længden af kablet er  $l \gg b$ . Det indre kabel ligger langs  $z$ -aksen mellem  $z = 0$  og  $z = l$ . Ved  $z = l$  er der et cylinderformet batteri, der forbinder det indre og det ydre kabel således, at potentialet er  $\varphi = 0$  på det ydre kabel og  $\varphi = U$  på det indre kabel. I den anden ende ( $z = 0$ ) er det indre og ydre kabel forbundet så her  $\varphi = 0$ . Der går en strøm  $I$  igennem systemet.



Figur 12

Tværsnit af coaxkablet med indre radius  $a$ , ydre radius  $b$  og længde  $l \gg b$ .

Det elektriske felt for  $a < r < b$ , altså mellem kablerne, har både en radial komponent  $E_r$  pga. overfladeladningerne, og en komponent  $E_z$  langs med kablet pga. kontinuiteten af tangentialkomponenten af  $\vec{E}$  i  $r = a$ . Pga.  $E$ -feltets cylindriske symmetri findes det nemmest ved først at løse Laplaces ligning for potentialet i cylindriske koordinater

$$\nabla^2 \varphi = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (14)$$

Da  $E_z$  er konstant langs lederen, altså uafhængig af  $z$ , er  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$ ,

og  $\varphi(r, z)$  er en lineær funktion af  $z$ . Det kan udtrykkes ved  $\varphi(r, z) = f(r) \cdot g(z)$  hvor  $g(z) = U \cdot z / l$ .  $f(r)$  findes af

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) = 0 \Leftrightarrow r \frac{df}{dr} = c \Leftrightarrow f(r) = c \cdot \ln(r) + d$$

Med randbetingelserne  $f(a) = 1$  og  $f(b) = 0$ , bliver potentialet

$$\varphi(r, z) = \frac{U}{l} \cdot z \cdot \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)} \quad (15)$$

Det elektriske felt udtrykt ved enhedsvektorerne  $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi$  og  $\vec{e}_z$  er

$$\vec{E}(r, z) = -\vec{\nabla} \varphi = \frac{U}{l} \cdot \frac{z}{r} \cdot \frac{1}{\ln(b/a)} \cdot \vec{e}_r - \frac{U}{l} \cdot \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)} \cdot \vec{e}_z \quad (16)$$

Magnetfeltet for  $a < r < b$  er det velkendte for en lang lige leder

$$\vec{B}(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\phi \quad (17)$$

Poyntingvektoren i området er da

$$\begin{aligned} \vec{S}(r, z) &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \\ &= -\frac{U}{l} \cdot \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)} \cdot \frac{I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_r - \frac{U}{l} \cdot \frac{z}{r} \cdot \frac{1}{\ln(b/a)} \cdot \frac{I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_z \end{aligned} \quad (18)$$

Radialkomponenten af  $\vec{S}$  angiver pga. fortegnet effektfluxtætheden fra feltet ind imod det indre kabel. Det ses, at denne er uafhængig af  $z$ . Størrelsen af den samlede effekt, der strømmer ind i kablet udefra, findes derfor ved at sætte  $r = a$  og gange

med overfladearealet  $2\pi r \cdot l$

$$P_{\text{tot}} = \frac{U}{l} \cdot \frac{\ln(b/a)}{\ln(b/a)} \cdot \frac{I}{2\pi r} \cdot 2\pi r \cdot l = U \cdot I \quad (19)$$

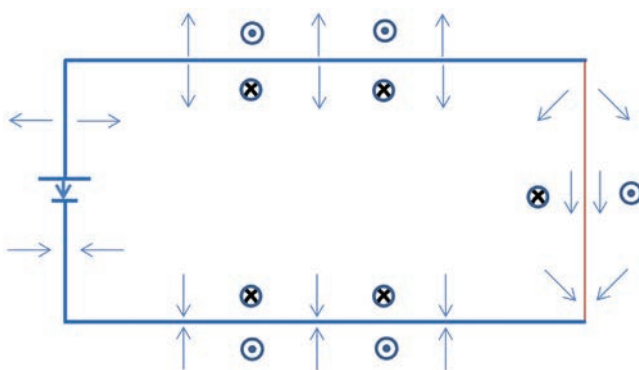
som er den velkendte elektriske effekt afsat i komponenten. Altså leveres hele den i kablet afsatte effekt fra felterne udenfor!

Parallelkomponenten af effektfluxtætheden er også vældig interessant, da denne afspejler hvordan energibevarelsen manifesterer sig lokalt. Parallelkomponenten aftager eftersom  $z$ -koordinaten formindskes, i takt med at der afsættes energi i det indre kabel. Den samlede effekt der strømmer parallelt med kablet igennem en plan  $A$  ortogonal med kablet i højden  $z$ , har størrelsen

$$P_{\parallel}(z) = \iint_A S_z(r, z) dA \\ = \int_a^b \frac{U}{l} \cdot \frac{z}{r} \cdot \frac{1}{\ln(b/a)} \cdot \frac{I}{2\pi r} \cdot 2\pi r dr = \frac{z}{l} \cdot U \cdot I \quad (20)$$

Øverst i kredsløbet strømmer den fulde effekt langs med kablet, men den aftager mod nul eftersom effekten leveres til kablet.

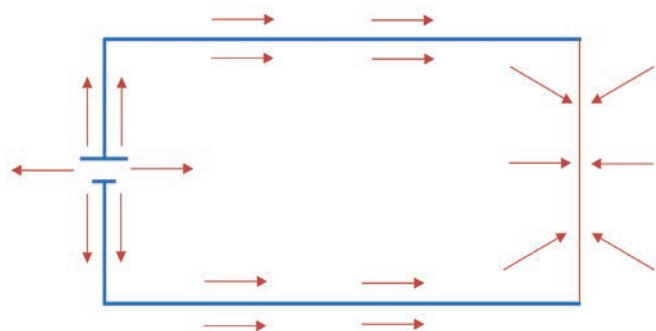
Vi vil nu undersøge poyntingvektoren for vores kredsløb med kanthaltråden som resistor. Hvis vi ser bort fra det lille elektriske felt inde i kobberledningerne, og vi også ser bort fra randeffekter, er det elektriske felt ved kobberledningerne radialt. Det peger væk fra lederen på den positive side, og peger ind imod lederen på den negative side. Uden for kanthaltråden, har  $E$ -feltet en stor tangentiell komponent pga. det interne felt i tråden, mens den radiale komponent gradvist går mod nul mod midten af tråden. Inde i spændingskilden er det elektriske felt modsatrettet strømmen.  $E$ -felterne sammen med magnetfeltet er illustreret i figur 13.



Figur 13  
Det elektriske og det magnetiske felt omkring kredsløbet.

Som konsekvens af det elektriske og magnetiske felts orientering, vil poyntingvektoren i nærheden af kredsløbet, have ret-

ning parallelt med kobberledningerne, og med retning væk fra spændingskilden på såvel den positive som den negative side. Ved kanthaltråden har poyntingvektoren en komponent radialt ind mod tråden. Grundet  $E$ -feltets orientering inde i spændingskilden, vil poyntingvektoren der have en radial komponent, der peger ud fra spændingskilden. Det kvalitative billede er således, at energien strømmer i alle retninger fra spændingskilden, mere eller mindre parallelt med kobberledningerne, og gør sin entré i resistoren fra alle sider.



Figur 14  
Illustration af effektstrømtætheden omkring kredsløbet.

Lad os se regne på størrelsen af energistrømmen. Vi starter med effekten omsat i kanthaltråden.

Beregning af poyntingvektoren  $\vec{S}(\vec{r})$  i et vilkårligt punkt, bygger på  $E$ - og  $B$ -feltet i punktet, hvor begge felter er beregnet ud fra ladning og strøm i hele kredsløbet, hvilket er mere kompliceret her end ved coaxkablet. Hvis vi kun er interesserede i  $\vec{S}(\vec{r})$  i nærheden af kobberledningerne eller kanthaltråden, kan vi ignorere felterne fra naboleddninger. Det gør problemet væsentligt nemmere.

Det elektriske felt parallelt med, og lige uden for kanthaltråden, er  $E = U/l$ . Det magnetiske felt i afstanden  $r$  fra trådens centrum er som før givet ved  $B = \mu_0 I / (2\pi r)$ . Dermed er størrelsen af poyntingvektorens komponent, med retning ind i tråden

$$S = \frac{1}{\mu_0} \cdot E \cdot B = \frac{U \cdot I}{2\pi r \cdot l} \quad (21)$$

Sætter vi  $r = a$ , lederens radius, og ganger med trådens overfladeareal, er den samlede effekt, der strømmer ind i tråden via poyntingvektoren

$$P_{\text{tot}} = S \cdot 2\pi r \cdot l = U \cdot I \quad (22)$$

Hele den afsatte effekt i lederen kommer fra feltet udenfor, som i coaxkablet.



Effektstrømtætheden ind i resistoren må nødvendigvis hænge sammen med effektstrømtætheden fra spændingskilden langs med kobberledningerne.

Vi bruger den samme approksimation som tidligere for  $E$ -feltet, nemlig for en uendelig lang lige leder,  $E = \lambda / (2\pi\epsilon_0 r)$ , og magnetfeltet omkring en uendelig lang lige leder. Dermed kommer poyntingvektoren kun til at afhænge af afstanden  $r$  fra lederen. Størrelsen  $S_{\parallel}(r)$  af poyntingvektoren i nærheden af hver af de to kobberledere er da

$$S_{\parallel}(r) = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} = \frac{\lambda \cdot I}{4\pi^2 \epsilon_0 \cdot r^2}$$

Vi har tidligere fundet sammenhængen mellem overfladeladningen og spændingsfaldet, ligning (6), mellem de to kobberledere,  $\lambda = \pi\epsilon_0 U / \ln(d/a)$ .

Dermed er

$$S_{\parallel}(r) = \frac{\pi\epsilon_0 \cdot U \cdot I}{4\pi^2 \epsilon_0 \ln(d/a)} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{U \cdot I}{4\pi \ln(d/a)} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (23)$$

Effektstrømmen igennem et areal med radius  $r$  omkring lederen med radius  $a$  er

$$P_{\parallel}(r) = \frac{U \cdot I}{4\pi \ln(d/a)} \int_a^r \frac{2\pi r}{r^2} dr = \frac{1}{2} \cdot U \cdot I \cdot \frac{\ln(r/a)}{\ln(d/a)}$$

Af symmetri Grunde bidrager begge kobberledere med samme effektstrøm, så den totale effektstrøm igennem to flader med radius  $r$  omkring kobberlederne er

$$P_{\text{tot},\parallel}(r) = U \cdot I \cdot \frac{\ln(r/a)}{\ln(d/a)} \quad (24)$$

Af den logaritmiske brøk kan vi beregne hvor stor en andel af den effekt, der afsættes i resistoren, som strømmer dertil fra området inden for afstanden  $r$  fra kobberlederne.

Med  $a = 0,5$  mm og  $d = 1$  m fås:

$$P_{\text{tot},\parallel}(1 \text{ cm}) = 0,39 \cdot U \cdot I$$

$$P_{\text{tot},\parallel}(2 \text{ cm}) = 0,49 \cdot U \cdot I$$

$$P_{\text{tot},\parallel}(10 \text{ cm}) = 0,7 \cdot U \cdot I$$

Beregningen i 10 cm afstand fra lederen er tvivlsom da forudsætningen om at  $r \ll d$  ikke helt er opfyldt. Men beregningen i 1 og 2 cm afstand fra lederne er til at stole på; omkring halvdelen af effekten strømmer til resistoren i mindre end 2 cm afstand fra lederne.

I sin bog *Elektromagnetisme* [12] kommer Bent Elbek ind på, at poyntingvektoren har givet anledning til diskussioner. Det bunder i, at den kun optræder igennem sin divergens i energiligningerne for det elektromagnetiske felt. Derfor kan man lægge et vilkårligt felt,  $\vec{V} \times \vec{G}$ , til  $\vec{S}$ , og stadigvæk have den samme divergens. Men med Elbeks ord: "Selvom poyntingvektoren undertiden fører til overraskende resultater, ser man aldrig noget, som er i strid med, hvad vi i øvrigt ved om det elektromagnetiske felt. Så indtil andet måtte foreligge, er der god grund til at anse det simple udtryk for korrekt".

Poyntingvektoren anvendes rutinemæssigt til beskrivelse af elektromagnetiske bølgers energiudbredelse og udstråling fra en oscillerende elektrisk dipol, men kan lige så godt bruges selvom felternes frekvens er nul. Som i et simpelt jævnstrømskredsløb i fysiklaboratoriet i gymnasiet.

Analysen med udgangspunkt i poyntingvektoren har vist os, at felterne omkring kredsløbet er svære at komme udenom hvad angår energitransport og energiomsætning. I feltmodellen skaber de strømmende ledningselektroner det nødvendige magnetfelt, for at energiomsætningen kan finde sted. Det er deres rolle. Men energien viser sig at strømme uden om ledningerne, og følger ikke engang strømmens retning, i overensstemmelse med Sommerfelds konklusioner.

## Referencer

- [1] W. G. V. Rosser, *Magnitude of surface charge distributions associated with electric current flow*, Am. J. Phys., Februar 1970.
- [2] B. A. Russel og M. A. Mazek, *On the transverse electric field in a conductor carrying a steady current*, Am. J. Phys., Oktober 1968.
- [3] A. Sommerfeld, *Electrodynamics*, New York: Academic Press, 1952.
- [4] J. D. Jackson, *Surface charges on circuit wires resistors play three roles*, Am. J. Phys., 1996.
- [5] H. Härtel, [www1.astrophysik.uni-kiel.de/~hhaertel/PUB/Voltage-PdN.pdf](http://www1.astrophysik.uni-kiel.de/~hhaertel/PUB/Voltage-PdN.pdf), 2012.
- [6] [physlab.org/class-demo/surface-charges](http://physlab.org/class-demo/surface-charges).
- [7] R. W. Chabay og B. A. Sherwood, [matterandinteractions.org/wp-content/uploads/2016/07/circuit.pdf](http://matterandinteractions.org/wp-content/uploads/2016/07/circuit.pdf), 2006.
- [8] O. Jefimenko, *Demonstrations of the electric fields of a current-carrying conductors*, Am. J. Phys., Januar 1962.
- [9] B. A. Sherwood og R. W. Chabay, *Polarization in electrostatics and circuits: Computing and visualizing*, Am. J. Phys., 2019.
- [10] R. P. Feynmann, R. B. Leighton og M. Sands, [www.feynmanlectures.caltech.edu](http://www.feynmanlectures.caltech.edu).
- [11] M. K. Harbola, *Energy flow from a battery to other circuit elements: Role of surface charges*, Am. J. Phys., 2010.
- [12] B. Elbek, *Elektromagnetisme*, Niels Bohr Institutet, 1993.