

Raketopsendelse

MICHAEL LENTFER JENSEN, Alssundgymnasiet Sønderborg

Det er målet her at beskrive en raketopsendelse ved at starte med en meget simpel model og gradvist tage hensyn til flere fysiske forhold for at forbedre modellen. Til sidst står vi forhåbentlig med en realistisk model, der kan beskrive en konkret raketopsendelse.



Vi anvender en raket af typen Sixpack Maxi fra modelraket.dk med følgende data: Længde: 49,5 cm, vægt: 80 g, Ø 35 mm. Det tager eleverne ca. 60 minutter at samle raketten. De arbejder i 2-mandsgrupper.

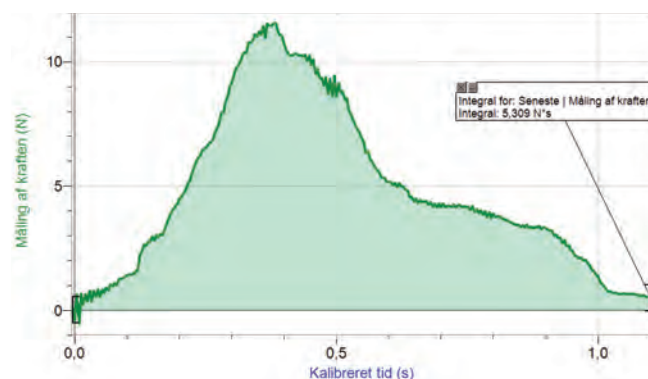
Raketten skal forsynes med en passende faststofmotor B4-4 med følgende data: Total impuls: 5 N·s, brændtid: 1,1 s, vægt: 17 g (hvor de 8,3 g er brændstof), Ø 18 mm.

Det er vigtigt at tage højde for vindretning under affyring. Da vi gerne vil have raketten rimelig hurtig ned igen, er der klippet et rundt hul i faldskærmen, så raketten ikke driver for langt væk med vinden. På en jævn blæsevejrsgang med en vind på 12 m/s, driver raketten ca. 100 meter fra affyrsstedet med vindretningen. Hvis der ikke er nok plads, kan raketten nemt lande ubehjælpelig i toppen af et træ...



Det er oplagt at undersøge motorkraften ved at spænde motoren fast til en kraftmåler og opsamle data med en datalogger. Man skal blot huske på, at der kommer en sekundær eksplosion fra raketmotoren, der anvendes til at udfolde faldskærmen, som er i modsatte retning af motorens udstødning.

Ved at veje motoren før og efter kan massen af brændstof bestemmes til 8,3 g. Dataopsamling for motorkraften gav følgende graf:



Motorens totale impuls kan findes som arealet under kurven, da

$$I_{\text{tot}} = \Delta p = \int_0^{t_b} F(t) dt \approx 5,3 \text{ N} \cdot \text{s}$$

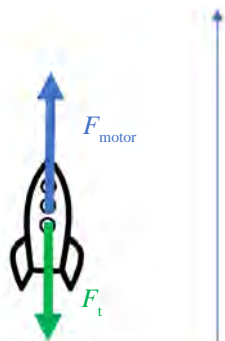
hvor t_b er brændtiden. Vi kan i dette eksperiment bekræfte producentens oplysning om, at den totale impuls er ca. 5 N·s, og at brændtiden er ca. 1,1 s.



De målte størrelser anvendes sammen med FPro3 til at skabe en simulering af raketens højde som funktion af tiden. Først når eleverne har en rimelig realistisk simulering af højde som funktion af flyvetid, hvor udfoldning af faldskærmen er med, må de affyre deres raket. I elevernes simulering anvender de deres egne målinger for raketens masse og diameter, faldskærmens areal, bud på formfaktor og motorens masse. Man kan tilføje et konkurrenceelement ved at sige, der er størst ære til den 2-mandsgruppe, som får simuleret den flyvetid, der kommer tættest på den faktiske flyvetid fra affyring til landing.

1. Den simple model

Til at beregne raketten bevægelse og højde anvender vi Newtons 2. lov, hvor den resulterende kraft kun består af en nedadrettet tyngdekraft og en opadrettet kraft fra raketten faststofmotor.



PROGRAM LØKKE

```
Fres := Fm - Ft // den resulterende kraft
ay := Fres/m // acceleration
vy := vy + ay*dt // ny hastighed
y := y + vy*dt // nyt sted

t := t + dt // opdatering til ny tid

If y < 0 then stop
if t > 25 then stop
```

Da raketten kun når en lodret højde på under 100 m, er det i orden at antage, at tyngdeacceleration er konstant, og dermed bliver $F_t = m \cdot g$.

$$\begin{aligned} F_{\text{res}} &= F_{\text{motor}} - F_t \\ &= F_{\text{motor}} - m \cdot g \end{aligned}$$

Når vi kender den resulterende kraft, kan accelerationen bestemmes ved

$$F_{\text{res}} = m \cdot a \Leftrightarrow a = \frac{F_{\text{res}}}{m}$$

Med accelerationen beregnet kan vi benytte ligningerne for bevægelse til at bestemme hastighedsændringen

$$a = \frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta v = a \cdot \Delta t$$

og derefter ændringen i positionen

$$v = \frac{ds}{dt} \approx \frac{\Delta s}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta s = v \cdot \Delta t$$

Vi kan altså beregne ændringer ved at regne os frem i små skridt, hvor Δt er meget lille. Når ændringer i hastighed og sted er beregnet, kan de adderes de nuværende værdier for hastighed og sted for dermed at finde den næste tilstand for systemet.

Ovenstående betragtninger giver anledning til FPro3-programmet:

KLAR LØKKE

```
Fm := 4.55 // motorkraften i N
m := 0.100 // masse af raket i kg
g := 9.82 // tyngdeacceleration i N/kg
Ft := m*g

vy := 0 // begyndelsesfart i m/s
y := 0 // begyndelsessted i m
t := 0 // starttid i s
dt := 0.01 // tidsskridt i s
UpdateRate := 100 // opdateringsrate for output
```

Opgave 1

- Kør modellen og kommentér grafens udseende.
- Diskutér mangler ved modellen.

2. Forbedring af model

Der er selvfølgelig mange problemer med denne simple model.

Vi har antaget, at motorkraften F_{motor} er konstant – det er ikke helt tilfældet, som vi så under dataopsamlingen for motorkraften. Vi får opgivet fra producenten, at motoren er tændt i 1,1 s, og den totale impuls (den samlede ændring i bevægelsesmængde) skulle være $\Delta p = 5 \text{ N} \cdot \text{s}$. Vi kan dermed give et fornuftigt bud på motorkraften, hvis den antages konstant og giver samme ændring i bevægelsesmængde:

$$\begin{aligned} \Delta p &= F_{\text{motor}} \cdot \Delta t \Leftrightarrow \\ F_{\text{motor}} &= \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{5 \text{ N} \cdot \text{s}}{1,1 \text{ s}} \approx 4,55 \text{ N} \end{aligned}$$

Vi skal også tage med i betragtning, at massen af raketten ændrer sig, når brændstoffet brændes af. Raketten masse m består af 2 dele, nemlig massen af den tomme raket m_{tom} og massen af brændstoffet $m_{\text{brænd}}$.

Det er oplyst om raketmotoren, at massen af brændstoffet er $m_{\text{brænd}} = 8,3 \text{ g}$, og målinger på raketmotoren bekræfter dette. Brændtiden er $t_{\text{brænd}} = 1,1 \text{ s}$. Det giver en afbrændingsrate på

$$R = \frac{m_{\text{brænd}}}{t_{\text{brænd}}} = \frac{0,0083 \text{ kg}}{1,1 \text{ s}} \approx 0,00755 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Der skal derfor foretages følgende ændringer/tilføjelser i Fpro3-programmets Klar løkke:

```
KLAR LØKKE
m_tom := 0.917
m_brænd := 0,083
t_brænd := 1.1
m := m_tom + m_brænd
R := m_brænd/t_brænd
dt := 0.001
```

Raketts masseændring dm i tidsrummet dt er derfor $dm = R \cdot dt$ og raketts nye masse efter hvert tidsskridt er $m = m - dm$.

Raketmotoren stoppes, når t bliver større end $t_{\text{brænd}}$, hvorefter m er konstant, og motorkraften F_m bliver 0.

Det giver følgende tilføjelser i Fpro3-programmets Program løkke:

```
PROGRAM LØKKE
dm := R*dt
m := m - dm
If t >= t_brænd then m := m_tom
If t >= t_brænd then Fm := 0
```

Opgave 2

- Tilføj ændringerne i programmet og lav en graf over højden som funktion af tiden.
- Passer simuleringen med producentens angivelse af maksimal flyvehøjde på ca. 80 m?
- Kommenter grafens udseende og forklar hvorfor den ser sådan ud.

Opgave 3

- Lav grafer for acceleration og hastighed, dvs. en (t, ay) -graf og en (t, vy) -graf.
- Kommenter deres udseende og forklar hvorfor de ser ud som de gør.

3. Luftmodstand

Der kommer selvfølgelig også luftmodstand, når raketten begynder at bevæge sig, og formelen for luftmodstand er givet ved

$$F_{\text{luft}} = k \cdot v^2$$

hvor luftmodstandsfaktoren k er

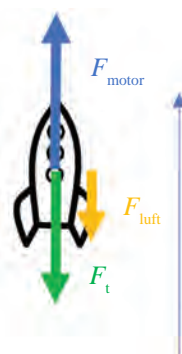
$$k = 1/2 \cdot A \cdot c_w \cdot \rho_{\text{luft}}$$

Luftmodstanden er altid modsat bevægelsesretningen, så når raketten flyver opad, virker luftmodstanden nedad.

For at beregne en rakets bevægelse og højde skal vi anvende Newtons anden lov

$$F_{\text{res}} = m \cdot a$$

Vi begynder med at lave et kraftdiagram for den resulterende kraft med luftmodstand:



Den valgte y -retning er positiv opad, så den resulterende kraft bliver:

$$F_{\text{res}} = F_{\text{motor}} - F_t - F_{\text{luft}}$$

$$F_{\text{res}} = F_{\text{motor}} - m \cdot g - k \cdot v^2$$

Accelerationen beregnes stadig ud fra den resulterende kraft $a = F_{\text{res}}/m$. Vi kan antage, at luftens densitet er $\rho_{\text{luft}} = 1,3 \text{ kg/m}^3$, og raketts formfaktor er $c_w = 0,5$ og tværsnitsarealet af raketten er $A = \pi \cdot (0,035/2 \text{ m})^2 = 0,000962 \text{ m}^2$.

Der skal nu foretages følgende ændringer eller tilføjelser i Fpro3-programmets Klar løkke og Program løkke:

```
KLAR LØKKE
A := 0.000962
cw := 0.5
rho_luft := 1.3
k := 0.5*A*cw*rho_luft
```

```
PROGRAM LØKKE
Fres := Fm + m*g - sign(vy)*k*vy^2
```

Faktoren $-\text{sign}(vy)$ sikrer, at luftmodstanden bliver modsatrettet farten.

Opgave 4

- Tilføj ændringerne i programmet og lav en graf over højden som funktion af tiden.
- Kommenter grafens udseende og forklar hvorfor den ser sådan ud.

Opgave 5

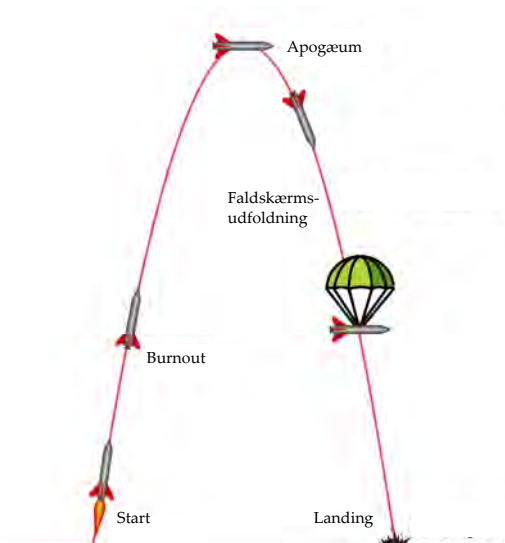
- Lav grafer for acceleration og hastighed, dvs. en (t, a_y) -graf og en (t, v_y) -graf.
- Kommenter deres udseende og forklar hvorfor de ser ud som de gør.
- Passer det fx med flyvehøjden for producentens angivne 80 meter?

Opgave 6

- Prøv for sjov at ændre formfaktoren til $c_w = 0,2$ og undersøg de samme grafer for højde, acceleration og hastighed, dvs. en (t, y) -graf, en (t, a_y) -graf samt en (t, v_y) -graf.
- Kommenter deres udseende og forklar, hvorfor de nu ser ud, som de gør.
- Passer det med flyvehøjden for producentens angivne 80 meter?

4. Faldskærm

Faldskærmen foldes ud, når raketten er i maksimal højde. Det betyder, at raketten kommer langsommere ned og dermed får en længere flyvetid fra start til landing. Kan vi simulere, hvor lang tid raketten er i luften?



Konstanter til faldskærmen måles, og vi får radius til 20 cm, formfaktoren for faldskærmen antages til at være $c_{skærm} = 0,8$.

Det giver et par nye tilføjelser til Klar løkke og Program løkke.

KLAR LØKKE

```
A_skærm := 0.1257
c_skærm := 0.8
k_skærm := 0.5·A_skærm·c_skærm·rho_luft
```

PROGRAM LØKKE

```
If  $v_y < 0$  then  $k := k\_skærm$ 
```

Opgave 7

- Tilføj ændringerne i programmet og lav en graf over højden som funktion af tiden.
- Kommenter grafens udseende og forklar hvorfor den ser sådan ud.

Opgave 8

- Lav grafer for de første 8 sekunder for acceleration og hastighed, dvs. en (t, a_y) -graf og en (t, v_y) -graf.
- Kommenter deres udseende og forklar hvorfor de ser ud som de gør.
- Hvor lang tid er raketten i luften?
- Med hvilken fart rammer raketten jorden?
- Hvor stor er den maksimale kraft på raketten?
- Hvor stor er den maksimale acceleration på raketten, og hvornår sker det?

Opgave 9

Det dynamiske tryk på raketten er givet ved udtrykket

$$q = 1/2 \cdot \rho_{luft} \cdot v^2$$

- Lav en beregning af det dynamiske tryk q i simuleringen og lav en (t, q) -graf.
- Kommenter og forklar grafens udseende.
- Hvad er det største dynamiske tryk $MaxQ$?
- Hvornår sker det?

