

Skråt kast med luftmodstand og vind

JENS BUSCK, Skive Gymnasium & HF

Indledning

Er det muligt at et målsparke i modvind kan give selvmål? Kan fysikkens love og matematikkens værktøjskasse give et rimeligt kort svar? Bagest i artiklen er et link til en Youtube video med en uheldig målmand.

Målet er at opstille en fysisk matematisk model for skråt kast med luftmodstand og vind. Herunder lodret fald med luftmodstand.

Skråt kast 2D-model med luftmodstand, uden vind

Newtons 2.lov på vektorform,

$$\vec{F}_{\text{res}} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_z \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

hvor \vec{F}_{res} er den resulterende kraft, m er genstandens masse, \vec{a} er accelerationsvektoren, og "mærke" er differentiation med hensyn til tid. x er vandret og z er lodret.

Bevægelsesligning på vektorform,

$$\vec{F}_{\text{res}} = m \cdot \vec{g} + \vec{F}_{\text{luftmodstand}}$$

hvor

$$\vec{F}_{\text{luftmodstand}} = -\frac{1}{2} c_v A \rho v^2 \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

hvor der er ganget med en enhedsvektor i hastighedens retning.

$$\vec{F}_{\text{res}} = m \cdot \vec{g} - \frac{1}{2} c_v A \rho |\vec{v}| \vec{v}$$

hvor minus er indført, da luftmodstandskraften er modsatrettet hastighedsvektoren, \vec{g} er tyngdeaccelerationsvektoren, c_v er genstandens formfaktor, A er genstandens tværsnitsareal, ρ er luftens densitet og \vec{v} er hastighedsvektoren, og farten $v = |\vec{v}|$.

Bevægelsesligning med koordinater, hvor der er divideret med massen m ,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -|\vec{g}| \end{pmatrix} + k v \begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix}$$

hvor

$$k = -\frac{c_v A \rho}{2m} \quad \text{og} \quad v = |\vec{v}| = (x'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}$$

Bevægelsesligningerne i x og z er koblede differentialligninger,

$$\begin{aligned} x'' &= k v x' \\ z'' &= k v z' - g \end{aligned}$$

Taylor differensligning stedfunktion, x -koordinat, rækkeudvikling,

$$x_{n+1} \approx x_n + x'_n \Delta t + \frac{1}{2!} x''_n \Delta t^2$$

substituerer $x''_n = k v_n x'_n$

$$x_{n+1} \approx x_n + x'_n \Delta t + \frac{1}{2!} k v_n x'_n \Delta t^2$$

hvor

$$v_n = (x_n'^2 + z_n'^2)^{\frac{1}{2}}$$

Taylor differensligning hastighedsfunktion, x' -koordinat,

$$\begin{aligned} x'_{n+1} &\approx x'_n + x''_n \Delta t \\ x_{n+1} &\approx x_n + k v_n x'_n \Delta t \end{aligned}$$

Taylor differensligning stedfunktion, z -koordinat, rækkeudvikling,

$$z_{n+1} \approx z_n + z'_n \Delta t + \frac{1}{2!} z''_n \Delta t^2$$

substituerer $z''_n = k v_n z'_n - g$

$$z_{n+1} \approx z_n + z'_n \Delta t + \frac{1}{2!} (k v_n z'_n - g) \Delta t^2$$

Taylor differensligning hastighedsfunktion, z' -koordinat,

$$\begin{aligned} z'_{n+1} &\approx z'_n + z''_n \Delta t \\ z_{n+1} &\approx z_n + (k v_n z'_n - g) \Delta t \end{aligned}$$

For overblikkets skyld, koordinater til begyndelsesposition og begyndeshastighed,

$$x_0, z_0, x'_0, z'_0$$

Parameter tidsstep,

$$\Delta t$$

Genstandsvariable: formfaktor og tværsnitsareal,

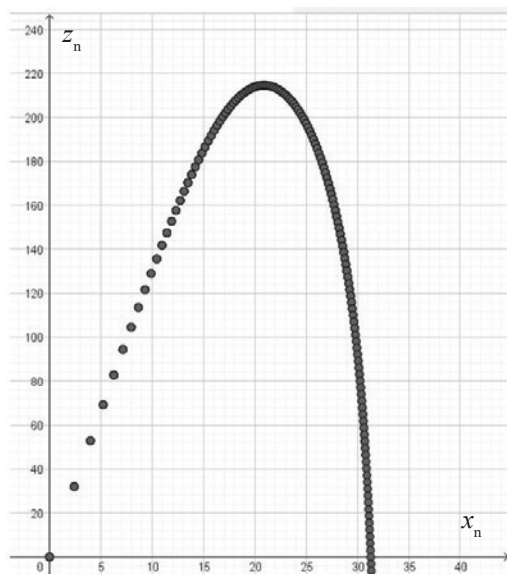
$$c_v, A$$

Miljøvariable: tyngdeacceleration og luftens densitet,

$$g, \rho$$

Geogebra eksempel,

$$\begin{aligned} E3 &= E2 + (\$H\$2 (D2^2 + E2^2)^{0.5} * E2 - \$G\$2) \$F\$2 \\ &= 400 + (-0,01(30^2 + 400^2)^{0.5} \cdot 400 - 9,82) \cdot 0,1 \approx 238,57 \end{aligned}$$



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	xn	zn	xmn	zmn	dt	g	k
2	0	0	0	30	400	0.1	9.82	-0.01
3	1	2.39831	31.92843	17.9663	238.56863			Lodret terminalfart 31.33688
4	2	3.98003	52.88239	13.66797	180.51047			
5	3	5.22311	69.25047	11.19369	146.85117			
6	4	6.26005	82.80509	9.54512	124.24134			
7	5	7.15509	94.40606	8.35572	107.77795			
8	6	7.9455	104.55221	7.45246	95.145			
9	7	8.65519	113.56359	6.74122	85.0827			
10	8	9.30054	121.65967	6.16586	76.83895			
11	9	9.89336	128.99831	5.69056	69.93375			
12	10	10.44245	135.69724	5.29128	64.04485			
13	11	10.95458	141.84684	4.95125	58.94714			
14	12	11.43506	147.5181	4.65836	54.47814			
15	13	11.88816	152.76788	4.40366	50.51744			
16	14	12.31736	157.64244	4.18035	46.97375			
17	15	12.72554	162.17995	3.98321	43.7765			
18	16	13.11511	166.41229	3.80812	40.8702			
19	17	13.4881	170.36633	3.6518	38.21059			
20	18	13.84627	174.06495	3.51163	35.76189			
21	19	14.19113	177.52779	3.38544	33.49482			
22	20	14.52397	180.77179	3.27147	31.3852			

Skrået kast 2D-model med luftmodstand og horisontal vind

Newtons 2. lov for den resulterende kraft med koordinater,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -|g| \end{pmatrix} + kv \begin{pmatrix} x' - x'_{\text{vind}} \\ z' \end{pmatrix}$$

hvor x'' og z'' er henholdsvis vandret og lodret acceleration i forhold til jorden, og hvor den relative fart i forhold til luften er givet ved,

$$v = \left((x' - x'_{\text{vind}})^2 + z'^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Taylor differensligning stedfunktion, rækkeudvikling af x -koordinat, hvor det bemærkes at vinden kun påvirker accelerationsleddet,

$$x_{n+1} \approx x_n + x'_n \Delta t + \frac{1}{2!} k v_n (x'_n - x'_{\text{vind}}) \Delta t^2$$

hvor

$$v_n = \left((x'_n - x'_{\text{vind}})^2 + z_n'^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Taylor differensligning hastighedsfunktion, x' -koordinat, hvor det bemærkes at vinden kun påvirker accelerationsleddet,

$$x'_{n+1} \approx x'_n + k v_n (x'_n - x'_{\text{vind}}) \Delta t$$

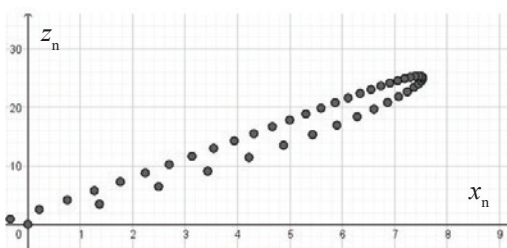
Taylor differensligning stedfunktion, z -koordinat,

$$z_{n+1} \approx z_n + z'_n \Delta t + \frac{1}{2!} (k v_n z'_n - g) \Delta t^2$$

Taylor differensligning hastighedsfunktion, z' -koordinat,

$$z'_{n+1} \approx z'_n + (k v_n z'_n - g) \Delta t$$

Fodboldmålmands selvmål i modvind. Talværdierne er repræsentative for skudfart og k -værdi, (se nederst i dokumentet). Modelleret i Geogebra. Grundenhederne er meter, sekunder og kilogram. Se eventuelt link til Youtube video med målmand, der scorer selvmål i modvind.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	xn	zn	xmn	zmn	dt	g	k
2	0	0	0	15	37	0.1	9.82	-0.024
3	1	1.36604	3.45264	12.32075	32.0527			Lodret terminalfart 20.22787
4	2	2.49349	6.45857	10.22837	28.06605			
5	3	3.43235	9.09956	8.5488	24.7537			
6	4	4.21838	11.43395	7.17178	21.93405			
7	5	4.87816	13.50493	6.02376	19.48565	Vind		
8	6	5.43203	15.34541	5.05357	17.32385	-10		
9	7	5.89592	16.98098	4.2244	15.38763			

Terminalfart i 2D-modellen med luftmodstand og vind

Terminalfarten defineres som genstandens fart, når der ikke længere er en resulterende kraft på genstanden. Bevægelsesligningerne,

$$\begin{pmatrix} x_t'' \\ z_t'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -|\vec{g}| \end{pmatrix} + kv_t \begin{pmatrix} x_t' - x_{\text{vind}}' \\ z_t' \end{pmatrix}$$

hvor

$$v_t = \left((x_t' - x_{\text{vind}}')^2 + z_t'^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

hvor indeks t markerer "terminal", og x_t' er den horisontale hastighedskomponent i forhold til jorden.

Der gælder at

$$kv_t (x_t' - x_{\text{vind}}') = 0$$

hvilket med nulreglen giver,

$$v_t = 0 \quad \vee \quad x_t' = x_{\text{vind}}'$$

Der gælder for z -koordinaten,

$$-g + kv_t z_t' = 0$$

hvorfra terminalfarten kan isoleres,

$$v_t = \frac{g}{kz_t'}$$

hvorved det ses at det ikke er fysisk muligt at $v_t = 0$, da det vil kræve $z_t' \rightarrow \pm\infty$.

Ved terminalfarten gælder derfor at,

$$x_t' = x_{\text{vind}}'$$

Heraf får vi,

$$\begin{aligned} v_t^2 &= (x_t' - x_{\text{vind}}')^2 + z_t'^2 = z_t'^2 \\ v_t &= \pm z_t' \\ v_t &= -z_t' \end{aligned}$$

fordi bevægelsen mod slut må være nedadrettet, $z_t' < 0$, og farten altid er større end eller lig nul.

Vi samler ovenstående,

$$v_t = \frac{g}{kz_t'} \quad \wedge \quad v_t = -z_t'$$

$$v_t = \frac{g}{-kv_t}$$

$$v_t = \pm \sqrt{\frac{g}{-k}}$$

$$v_t = \sqrt{\frac{g}{-k}}$$

hvor at $k < 0$, og derfor $v_t > 0$.

Den lodrette komponent af terminalfarten,

$$z_t' = -\sqrt{\frac{g}{-k}}$$

Det konkluderes, at når den resulterende kraft i det skråt kast med luftmodstand og vind til slut er nul, hvis altså startbetingelserne tillader det, så vil genstanden følge med vinden i samme vandrette fart som denne, og bevæge sig nedad med den lodrette terminalfart $\sqrt{g/-k}$, hvor tyngdekraften og luftmodstanden netop udligner hinanden.

Terminalfart relativt til jorden,

$$v_{\text{underlag}} = \left(x_{\text{vind}}^2 - \frac{g}{k} \right)^{1/2}$$

Lodret fald med luftmodstand

I dette afsnit sammenholdes ovenstående analyse med tidligere energibetragtninger ved lodret fald med luftmodstand. Se artikel i LMFK-bladet, nummer 3, 2013, med den måske nok ikke helt korrekte titel: "Frit fald med luftmodstand", vil nogen måske mene, da frit fald måske netop er uden luftmodstand. Hvorom alting er, er der ikke noget i vejen med indholdet i artiklen fra 2013, der er i overensstemmelse med analysen herover.

I 2013 udledtes følgende sammenhæng mellem faldhastighed $v(z)$ og lodret faldstrækning z , i situationen, hvor en genstand er i hvile til start og derefter falder lodret nedad med luftmodstand. Ingen vind. Den da udledte formel lyder, omskrevet til notationen i denne artikel,

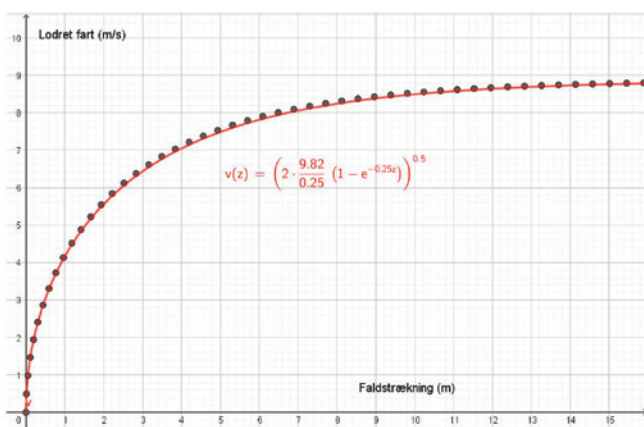
$$v(z) = \sqrt{\left(\frac{g}{-k} \right) (1 - e^{2kz})}$$










hvoraf det ses, at hvis faldstrækningen z er tilstrækkelig stor kan det eksponentielle led ignoreres og den tidligere omtalte terminalfart opnås $v_t = \sqrt{g/(-k)}$. Som tidligere er

$$k = -\frac{c_v A \rho}{2m}$$

På figuren nedenfor er vist numerisk simulering af lodret fald med luftmodstand, og analytisk formel udledt i LMFK-artikel om faldfart med luftmodstand.

n	xn	zn	xmn	zmn	dt	g	k	-zn	-zmn
0	0	0	0	0	0.05	9.82	-0.125	0	0
1	0	-0.01228	0	-0.491				0.01228	0.491
2	0	-0.04906	0	-0.98049			Lodret terminalfart	0.04906	0.98049
3	0	-0.11021	0	-1.46548			8.86341	0.11021	1.46548
4	0	-0.19543	0	-1.94306				0.19543	1.94306
5	0	-0.30426	0	-2.41047	Vind			0.30426	2.41047
6	0	-0.43615	0	-2.86515	0			0.43615	2.86515
7	0	-0.5904	0	-3.30484				0.5904	3.30484
8	0	-0.76621	0	-3.72758				0.76621	3.72758
9	0	-0.9627	0	-4.13174				0.9627	4.13174



Shape		Drag Coefficient
Sphere		0.47
Half-sphere		0.42
Cone		0.50
Cube		1.05
Angled Cube		0.80
Long Cylinder		0.82
Short Cylinder		1.15
Streamlined Body		0.04
Streamlined Half-body		0.09

Measured Drag Coefficients

Målspark, k -værdi for fodbold og boldens fart ved skud

I dette afsnit beregnes repræsentative talværdier i henhold til fodbold målmands målspark.

$$k = -\frac{c_v A \rho}{2m} = -\frac{0,47 \cdot \pi \cdot 0,11141^2 \text{ m}^2 \cdot 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{2 \cdot 0,450 \text{ kg}} \approx -0,024436 \text{ m}^{-1}$$

Skudfart i den hårde ende,

$$v \approx 144 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 39,925 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

hvor det ovenfor er programmet som $x'_0 = 15 \text{ m/s}$ og $z'_0 = 37 \text{ m/s}$, hvilket giver $v = \sqrt{15^2 + 37^2} \approx 39,925 \text{ m/s}$.

Tabel over formfaktor (dragcoefficient), c_v .

Referencer

1. L. Råde og B. Westergren, *Mathematics Handbook for science and engineering*, 3. udg., 1995, Studentlitteratur.
2. Figur: en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient
3. Dimensioner fodbold: da.wikipedia.org/wiki/Fodbold
4. Selvmål ved målspark i modvind: youtu.be/O4tVtfDTqJs