

# Simulering af simpel klimamodel med FPro3

HANS CHRISTIAN WESTTOFT, Rungsted Gymnasium

Denne artikel handler om, hvordan man kan modellere og simulere en simpel klimamodel med programmet FPro3, se [fys.dk/FPro3/FPro3\\_materialer.html](https://fys.dk/FPro3/FPro3_materialer.html).

Artiklen er inspireret af et fællesfagligt forløb mellem fysik og andet fremmedsprog sammen med Verner Schilling på Nørre Gymnasium. Forløbet indeholder cases om bæredygtighed og klima. Mere konkret beskriver det, hvordan elever kan bestemme parametre til en compartmentmodel ud fra nogle fysiske modeller og krav om, hvor hurtigt temperaturen ændrer sig.

## Grundlæggende fysik og model for Jorden

Der skal opstilles en klimamodel for Jorden ved hjælp af grundlæggende fysiske principper, og de to centrale principper er her:

- Et varmt legeme udsender elektromagnetisk stråling, og den strålingsenergi, der udsendes pr. sekund fra  $1 \text{ m}^2$  af legemets overflade, er givet ved Stefan–Boltzmanns lov

$$P = 1 \text{ m}^2 \cdot k_B \cdot T^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{K}^4} \cdot T^4$$

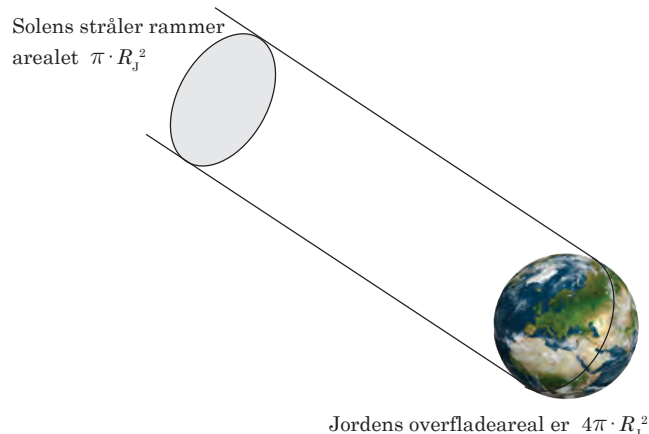
hvor  $k_B = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$  er Boltzmanns konstant og  $T$  legemets overfladetemperatur i kelvin. Man kan undersøge mere om bølgelængder og temperaturer samt den udstrålede intensitet på animationen [phet.colorado.edu/da/simulation/blackbody-spectrum](https://phet.colorado.edu/da/simulation/blackbody-spectrum)

- Et legeme er i termisk ligevægt, når det udsender lige så stor effekt som det modtager.

Grundideen i modellen er, at når vi starter med en eller anden temperatur for Jorden, så udstråler Jorden en energi, der afhænger af denne starttemperatur. Hvis Jordens temperatur er lav, så er udstrålingen lille og mindre end indstrålingen. Derfor stiger Jordens temperatur. Den nye højere temperatur giver så en større udstråling. Den nye udstråling er måske stadig lavere end indstrålingen, så temperaturen stiger stadig, og temperaturen stiger yderligere. *Solarkonstanten* er  $1360 \text{ W/m}^2$  og beskriver, hvor stor effekt den del af Jorden, der er vendt mod Solen modtager. Cirklen, der rammes af Solens stråler, har arealet  $\pi \cdot R_J^2$ , mens jordoverfladen er kugleformet med overfladearealet  $4\pi \cdot R_J^2$ . Effekten skal derfor fordeles på et areal, der er 4 gange så stort dvs. i gennemsnit modtager Jorden  $\frac{1}{4}$  af solarkonstantens effekt, se figur 1.

Desuden skal der tages hensyn til, at den gennemsnitlige albedo for Jorden (inklusive atmosfæren),  $\alpha$ , ikke bidrager til opvarmningen, så effekten for indstrålingen på  $1 \text{ m}^2$  er

$$P_{\text{Sol}} = 1 \text{ m}^2 \cdot (1 - \alpha) \cdot \frac{1}{4} \cdot 1360 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$



Figur 1

Areal, der rammes af Jordens stråler, og Jordens overfladeareal.

mens effekten, som Jorden udstråler beregnes ud fra Stefan–Boltzmanns lov, hvor  $T$  er Jordens overfladetemperatur

$$P_J = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{K}^4} \cdot T^4$$

Der vil altså være ligevægt, når  $P_{\text{Sol}} = P_J$ , dvs.

$$1 \text{ m}^2 \cdot \frac{(1 - \alpha)}{4} \cdot 1360 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{K}^4} \cdot T^4$$

som reduceres til

$$\frac{(1 - \alpha)}{4} \cdot 1360 = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{K}^4} \cdot T^4$$

Den gennemsnitlige albedo er 30 %, dvs. ovenstående kan omskrives til

$$T = \sqrt[4]{\frac{\frac{(1 - 0,30)}{4} \cdot 1360}{5,67 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{K}^4}}} = 255 \text{ K}$$

Ved beregning af ovenstående opnås en ligevægtstemperatur på 255 K eller  $-18^\circ \text{C}$ .

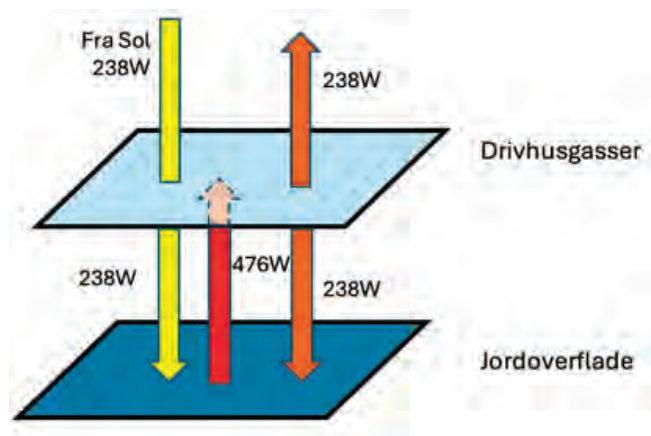
## Model med atmosfæren

For at udvide modellen skal vi medtage, hvordan atmosfærens indhold af drivhusgasser påvirker Jordens temperatur. Drivhusgasserne kan absorbere den langbølgede infrarøde stråling, men ikke den kortbølgede stråling fra Solen. For at undgå at gøre modellen for kompliceret, antager vi følgende:

- Atmosfæren er et uendeligt tyndt lag med egenskaber, så sollys vil passere uhindret og ikke absorberes.

- Atmosfæren med drivhusgasser absorberer en del af den infrarøde stråling udsendt fra Jorden, og atmosfæren udstråler effekt, som kan beregnes ud fra Stefan–Boltzmanns lov.
- Albedoen virker kun ved Jordens overflade, så sollyset reflekteres kun ved jordoverfladen, og derfor ses der bort fra fx skyer.

Det betyder, at der kan opstilles en compartmentmodel, som er illustreret på figur 2 for situationen, hvor albedoen er 0,30. Nu vil atmosfæren bliver varmet op og selv udstråle energi både opad (ud i rummet) og nedad (mod Jorden) dvs. Jorden modtager ekstra energi udover indstrålingen fra Solen.



Figur 2  
Model for Jorden og atmosfæren illustreret i en ligevægtssituation.

Der er to yderpunkter for atmosfæren, enten absorberes ingen strålingsenergi fra Jorden (det svarer til, at der ikke er nogen atmosfære), og atmosfæren absorberer al den energi Jorden udstråler. Der indføres derfor en variabel kaldet *GHG* – *GreenHouse Gasses* – som skal kunne antage forskellige værdier mellem 0 og 1.

Nu opskrives compartmentmodellen for ændring af temperaturen af Jorden,  $T_J$

$$dT_J = k_1 \cdot (P_{\text{Sol}} + P_{\text{atm}} - P_J) dt$$

dvs. Jorden opvarmes af effekten fra Solen og atmosfæren, men udstråler selv effekt.

Ændringen af atmosfærens temperatur afhænger af hvor mange drivhusgasser, der er i atmosfæren, *GHG*, for de absorberer en del af den udstrålede effekt fra Jorden, mens atmosfæren udsender effekt både tilbage mod Jorden og ud

$$dT_{\text{atm}} = k_2 \cdot (GHG \cdot P_J - 2 \cdot P_{\text{atm}}) dt$$

Det er nu et godt spørgsmål, hvordan vi bestemmer værdierne for  $k_1$  og  $k_2$ . Ud fra enhedsanalyse fremkommer det, at begge konstanter har enheden  $\frac{\text{K}}{\text{W} \cdot \text{år}}$ , så de beskriver i virkeligheden, hvor hurtigt temperaturen ændres pr. år i forhold til, hvor stor tilvæksten i effekten mellem ind- og udstråling er.

### Model implementeres i FPro3

I FPro3 kan en værdi bestemmes for  $k_1$  ved at se bort fra atmosfæren, så den indledende model ser således ud

$$dT_J = k_1 \cdot (P_{\text{Sol}} - P_J) dt$$

En elevøvelse er at bestemme en værdi for  $k_1$  ved at kræve at Jordens temperatur  $T_J$  ændres fra  $-123^\circ\text{C} = 150\text{ K}$  til ligevægtstemperaturen på  $255\text{ K}$  i løbet af 15 år, hvis man vælger et tidsstep  $dt$  på 0,2 år.

Først opstilles KLAR PROGRAM og LØKKE PROGRAM, hvor Jordens temperatur i kelvin er valgt som  $T$  for at gøre opskrivningen simplere, mens temperaturen i grader celsius er valgt som  $\Phi$ .

#### KLAR PROGRAM

//Albedo og indstrålingen fra Solen

$\alpha := 0.30$

$P_{\text{sol}} := 340 \cdot (1 - \alpha)$

//Starttemperatur for Jorden

$T := 150$

$t := 0$

$dt := 0.2$

$t_{\text{slut}} := 15$

//Konstanter

$k_B := 5.67 \cdot 10^{-8}$

$k_1 := 0.1$

#### LØKKE PROGRAM

$P_J := k_B \cdot T^4$

$dT := k_1 \cdot (P_{\text{sol}} - P_J)$

//Opdatering af temperatur og tid

$T := dT + T$

$t := dt + t$

//Nu bestemmes Jordens temperatur i grader celsius

$\Phi := T - 273$

IF  $t > t_{\text{slut}}$  THEN STOP

Figur 3

KLAR PROGRAM og LØKKE PROGRAM for model uden atmosfære til bestemmelse af  $k_1$ .

Man kan hurtigt ændre på værdien af  $k_1$  i KLAR PROGRAM, og på figur 4 ses tre grafer for, hvordan temperaturen ændrer sig, og det vurderes, at en værdi på 0,02 er passende.

Næste elevøvelse handler om at bestemme en værdi for *GHG*, der sammen med en valgt værdi for  $k_2$  på 0,1 giver Jorden en ligevægtstemperatur, der svarer til den globale middeltemperatur på  $15,0^\circ\text{C}$  for perioden 1961 – 1990, som man kan fin-

de på DMIs hjemmeside – [dmi.dk/klima/temaforside-jordens-middeltemperatur/jorden-har-en-officiel-middeltemperatur](https://dmi.dk/klima/temaforside-jordens-middeltemperatur/jorden-har-en-officiel-middeltemperatur).

Der vælges en startværdi for  $GHG$  på 0,60 for perioden på 1961 – 1990, og på figur 5 ses tre forskellige grafer fra FPro3-simuleringer af, hvordan temperaturen vil ændre sig over tid. Starttemperaturen er valgt til 255 K, som er ligevægtstemperaturen for Jorden uden atmosfære, mens temperaturen for atmosfæren er valgt til 80 % af denne værdi.

Ved at ændre på  $GHG$  i små steps vil elever finde frem til at en værdi på 0,785 giver en temperatur på 15,0 grader celsius. Men der har jo været en forsat udledning af drivhusgasser siden 1990, så hvordan tilføjer man yderligere drivhusgasser til modellen? Og kan man ændre albedoen for Jorden, som påvirker udstrålingen for Jorden? Svaret til begge er ja.

### Ændring af mængden af drivhusgasser i atmosfæren

Hvis man kigger på udviklingen af  $CO_2$ -koncentrationen i atmosfæren på figur 6, ses det, at koncentrationen stiger tilnærmelsesvis lineært i de seneste 15 år og med ca. 20 ppm på 16 år, dvs. med 1,25 ppm pr. år. Hvis stigningen fortsætter sådan i de kommende år, så svarer det til en årlig stigning i  $CO_2$ -koncentration på 0,3 % pr. år. Derfor kan vi ændre  $GHG$  med 0,3 % pr. år fra 0,785. Det er selvfølgelig en grov antagelse, og der ses helt bort fra, at der er en række andre drivhusgasser med forskellig *Global Warming Potentials (GWP)* og levetid i atmosfæren. Men hvis det skal modelleres, så må der gøres en antagelse.

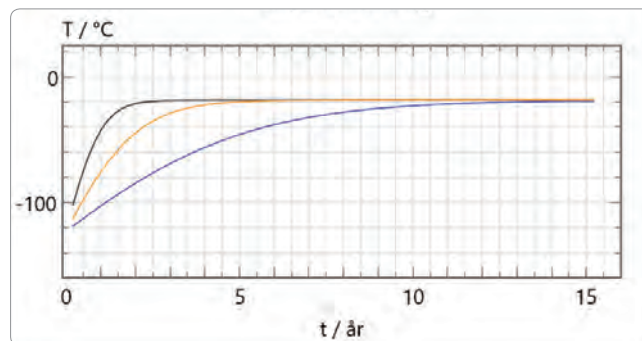
På figur 7 ses en simulering af, hvordan temperaturen vil ændre sig, hvis man ændrer  $GHG$  fra 0,785 til tiden 0 år med en stigning i  $GHG$  på 0 %, 0,3 % og 0,5 % pr. år.

På samme måde kan man ændre albedoen, og på samme måde som herover se, hvordan en årlig ændring af albedoen vil påvirke temperaturen.

Elevøvelser og FPro3-programmer til de forskellige øvelser er uploadet på hjemmesiden for FPro3. Der arbejdes på en udvikelse af øvelser, hvor flere parametre kan inddrages i modellen efter at have læst artiklen "*Compartment models to study human impact on climate change*" af Maren Hattebuhr & Martin Frank i tidsskriftet *Modelling in science education and learning*, volume 15 (1), 2022.

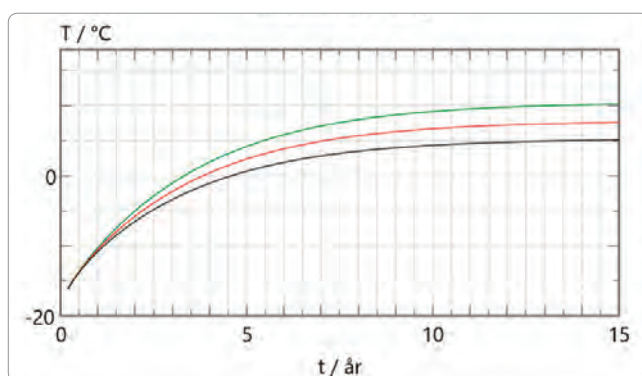
Figur 7

Hvor hurtigt Jordens temperatur ændrer sig med en procentvis årlig stigning i påvirkningen fra drivhusgasser modelleret med størrelsen  $GHG$  (sort 0%, lilla 0,3%, rød 0,5%).



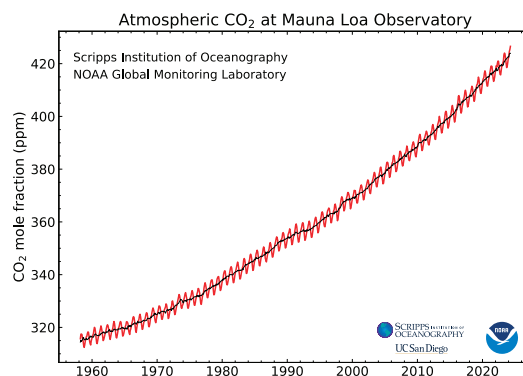
Figur 4

Hvor hurtigt Jordens temperatur ændrer sig med et tidsstep på 0,2 år for tre forskellige værdier af  $k_1$  (sort 0,1, orange 0,05, blå 0,02).



Figur 5

Hvor hurtigt Jordens temperatur ændrer sig med et stigende indhold af drivhusgasser, her modelleret med størrelsen  $GHG$  (sort 0,60, rød 0,65, grøn 0,70).



Figur 6

$CO_2$ -koncentrationen målt ved Mauna Loa-observatoriet på Hawaii i perioden 1958 – 2023.

