

# Faldende magneter – eller: Hvor lang er en stangmagnet?

NIELS ERIK WEGGE, Birkerød Gymnasium

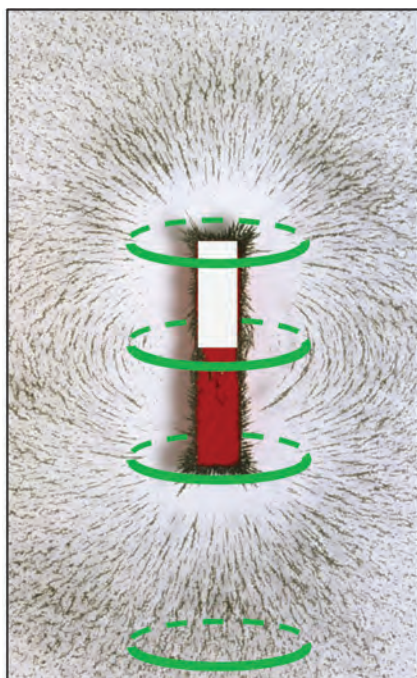
Mon ikke mange fysiklærere demonstrerer Faradays induktionslov ved at bevæge en stangmagnet op og ned i en spole og se på den inducerede spænding  $U$ ? Det simple forsøg giver umiddelbart tre vigtige kvalitative resultater:

1.  $U = 0$  medmindre magneten bevæges.
2. Fortegnet for  $U$  afhænger af hvilken vej man bevæger magneten i forhold til spolen.
3. Størrelsen af  $U$  vokser når magneten bevæges hurtigere.

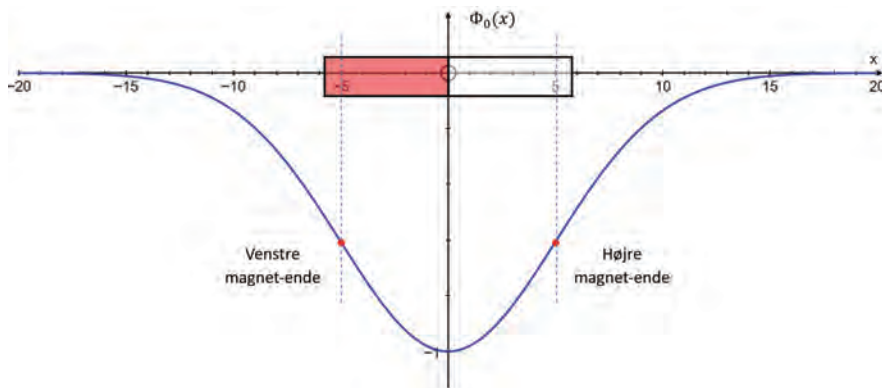
På grundlag af disse observationer kan man sandsynliggøre at

$$U = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

hvor  $N$  er antallet af vindinger i spolen og  $\Phi$  er fluxen af magnetfeltet  $B$  gennem spolens tværsnitsareal  $A$ . Mens de fundamentale forhold i Faradays induktionslov således let kan illustreres med det stærkt inhomogene magnetfelt fra en stangmag-



Figur 1  
Magnetfluxen er størst gennem den grønne cirkel ved magnetens midte, men fluxens rumlige ændringsrate er størst ved magnetenderne.



Figur 2

Et bud på det rumlige forløb af fluxen  $\Phi_0$  fra en stangmagnet gennem et fast areal placeret vinkelret på magnetens længdeakse i afstanden  $x$  fra dens centrum. Magnetenderne er defineret som de steder, hvor  $\left| \frac{d\Phi_0}{dx} \right|$  er størst, hvilket er vendetangentstederne for grafen (røde prikker). Bemærk at magnetens fysiske udstrækning er længere end dens magnetlængde. Fluxen er vist negativ, så magneten inducerer en positiv spænding hvis den bevæges hen mod en spole.

net, laves en egentlig eksperimentel undersøgelse af formlens gyldighed lettest med et kontrollerbart magnetfelt fra en elektromagnet. Er  $B$  fx jævnt voksende (eller aftagende), bliver den inducerede spænding konstant, og ændringshastigheden for  $B$  kan så sættes direkte i relation til størrelsen af  $U$ .

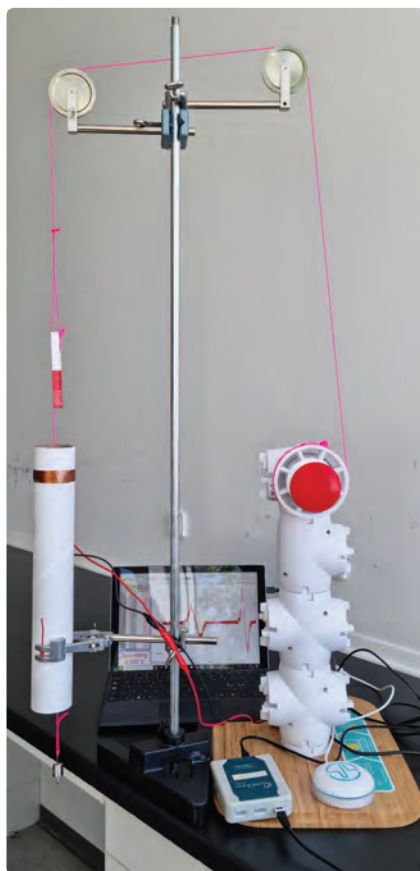
I denne artikel tager jeg alligevel fat på stangmagneten og undersøger hvad der sker, når den bevæger sig gennem en spole, dels ved forskellige konstante hastigheder, dels i et frit fald fra forskellige højder. Stor tak til Kasper Astrup Eriksen for gode samtaler om teorien!

## Fluxen fra en stangmagnet

En almindelig stangmagnet har et inhomogent men symmetrisk magnetfelt, som kan synliggøres med jernspåner, figur 1. Da magnetfeltlinjerne ændrer retning, må fluxen gennem et givet areal  $A$  (fx spolens areal) beregnes ved integration af komponenterne vinkelret på  $A$ . Fluxen er størst ved magnetens midte. Længere væk (men stadig på magnetens midterakse) vil de feltlinjer der går gennem  $A$  dels være færre og dels have større komponenter parallelt med  $A$ , og derfor bliver fluxen mindre. Præcis hvordan fluxen vokser og aftager langs magneten afhænger af den konkrete magnet, men det er oplagt, at der må være to steder, hvor fluxgrafen er stejlest. Disse to vendetangentsteder, hvor altså størrelsen af fluxens rumlige vækstrate er maksimal, vil vi kalde magnetens ”magnetender”. På figur 1 er det svært at se, om magnet-

enderne er sammenfaldende med magnetens rent fysiske ender. Vi vil derfor i det følgende skelne mellem stangmagnetens faktiske længde  $L$  og dens ”magnetlængde”  $L_M$ , som er afstanden fra magnetende til magnetende. Jeg vil i artiklen give tre forskellige eksperimentelle tilgange til at bestemme  $L_M$ .

Grafen i figur 2 viser et muligt forløb af fluxen  $\Phi_0(x)$  af magnetfeltet fra en stangmagnet målt gennem et fast areal placeret centralt og vinkelret i forhold til magnetens længdeakse i afstanden  $x$  fra magnetens midte – det kunne være det grønne areal på figur 1. Jeg har for nemheds skyld valgt en gaussisk graf, men det eneste væsentlige ved grafen er, at den har en numerisk største værdi ved  $x = 0$  (magnetens midte) og symmetrisk placerede vendetangentsteder (repræsenterende magnetenderne). Som vi skal se, er det nemlig især disse tre steder på magneten, der har betydning for hvordan grafen for  $U$  som funktion af tiden ser ud, når man fører magneten gennem en spole.



Figur 3  
Robotmotoren (foroven th) hejser magneten ned gennem spolen med konstant fart 16 cm/s og derefter op igen med 32 cm/s.

Nu placerer jeg magneten lodret, så dens midte til start er i afstanden  $h$  lige over en lodret monteret hjemmelavet spole med  $N = 100$  tætte vindinger af lakisoleret transformator-kobbertråd. Derfra lader jeg magneten bevæge sig ned mod og igennem spolen og er spændt på hvilken spænding  $U$ , der induceres undervejs.

Af hensyn til de kommende beregninger indlægger jeg en lodret  $x$ -akse (positiv opad) med nulpunkt i spolens midte og lader  $x(t)$  være positionen af magnetens midte til tiden  $t$ . Således er  $x(0) = h$ , og  $\frac{dx}{dt} = v$  er magnetens hastighed.

Med  $\Phi(t)$  betegner jeg fluxen fra magneten gennem spolen til tiden  $t$ . Den kan udtrykkes vha. magnetens rumlige fluxvariation  $\Phi_0(x)$  fra figur 2:

$$\Phi(t) = \Phi_0(-x(t)) \quad (2)$$

Faradays lov (1) med tidslig differentiation af den sammensatte funktion (2) giver den inducerede spænding for den generelle bevægelse  $x(t)$ :

$$U(t) = N \cdot \frac{d\Phi_0}{dx} \cdot v \quad (3)$$

For en vilkårlig bevægelse  $x(t)$  af magneten *nedad* mod spolen viser (3), at

- $U > 0$  i starten (fordi  $\frac{d\Phi_0}{dx} < 0$  og  $v < 0$ )
- $U = 0$  når magnetens midte passerer spolen (fordi  $\Phi_0$  er maksimal for  $x = 0$ , så  $\frac{d\Phi_0}{dx} = 0$ )
- $U < 0$  efter midten er kommet gennem spolen (fordi  $\frac{d\Phi_0}{dx} > 0$  og  $v < 0$ ).

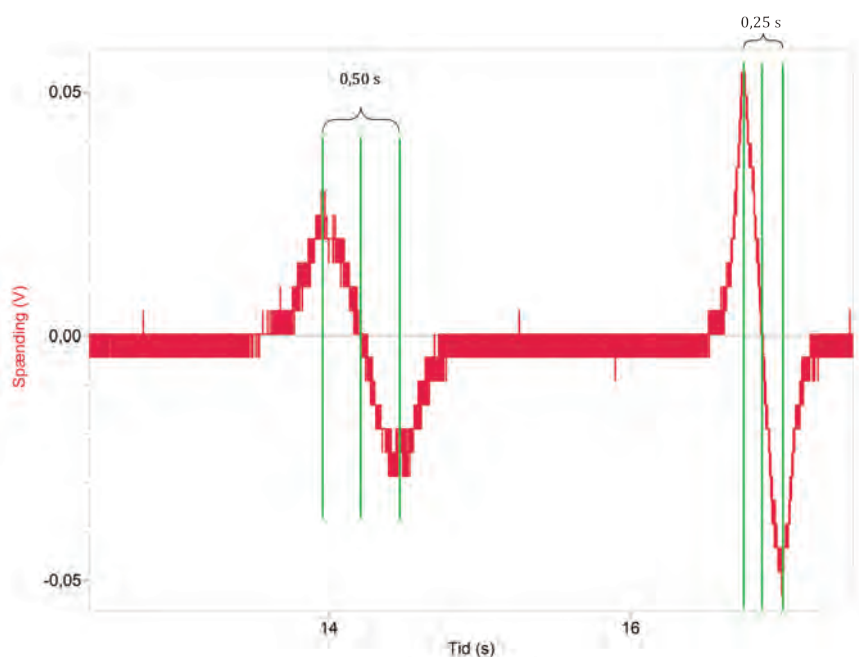
I det følgende ser vi på to konkrete afstandsfunktioner: Først  $x(t) = h + vt$ , svarende til, at magneten fra højden  $h$  hejses ned gennem spolen med konstant hastighed  $v < 0$ . Bagefter en frit faldende magnet med  $x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ .

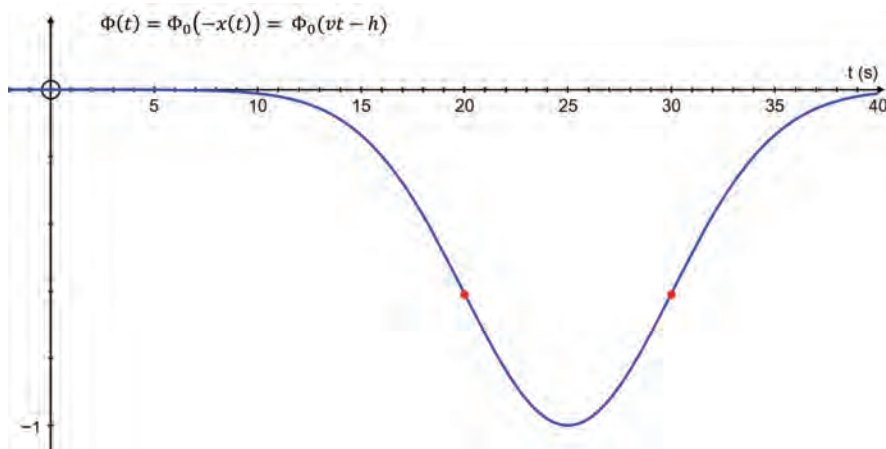
Figur 4  
Grafen viser den inducerede spænding, når magneten bevæger sig gennem spolen med konstant fart. Hver magnetpassage giver en positiv og en negativ top. Toppene er lige

### Passage med konstant hastighed

For at undersøge dette scenarie lader jeg en Spin-robot fra Shape Robotics' Fable-system hejse stangmagnetten ned gennem en spole med konstant fart og derefter op igen med dobbelt så stor konstant fart (Fig. 3). Robottens hejsefart er maksimalt 32 cm/s – ikke meget, men med  $N = 100$  vindinger på spolen fås alligevel en målelig induceret spænding (Fig. 4). En større spænding kunne fås med flere vindinger og/eller et hejsehjul med større diameter. Placering og størrelse af spændingstoppe i figur 4 overrasker ikke. Når  $v$  er konstant, viser (3) at de numerisk største værdier af spændingen forekommer når  $\frac{d\Phi_0}{dx}$  er numerisk størst, altså når de to magnet-ender passerer spolen. Hvis magnetfeltet er symmetrisk, vil magnet-enderne ligge lige langt fra magnetens midte, og  $\left|\frac{d\Phi_0}{dx}\right|$  vil have samme værdi i begge ender. Derfor er toppene på figur 4 lige store for hver magnetpassage, og  $U = 0$  ligger præcis midt imellem dem. De to sidste toppe ligger dobbelt så tæt som de første to (og er dobbelt så hø-

høje og er placeret symmetrisk omkring  $U=0$ . De sidste toppe ligger indbyrdes dobbelt så tæt som de første, fordi magneten bevæger sig dobbelt så hurtigt.





Figur 5

Grafen viser tidsvariationen af fluxen gennem spolen fra en fiktiv stangmagnet med rumlig fluxfunktion som på figur 2. Det er for nemheds skyld antaget, at magnetlængden er  $L_M = 10$  cm og at magnetens midte bevæger sig fra højden  $h = 25$  cm ned mod spolen med konstant hastighed  $v = -1$  cm/s. Den nederste magnetende er 5 cm under magnetmidten og vil passere spolen efter 20 s, svarende til den første røde prik. Den inducerede spænding  $U(t) = -N \frac{d\Phi}{dt}$  vil derfor være maksimalt positiv når  $t = 20$  s, nul når  $t = 25$  s og maksimalt negativ når  $t = 30$  s (anden røde prik).

je), fordi magneten bevæger sig dobbelt så hurtigt. Magnetlængden beregnes til

$$L_M = 16 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot 0,50 \text{ s} \\ = 32 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot 0,25 \text{ s} = 8,0 \text{ cm}$$

Magnetens faktiske længde er  $L = 10,0$  cm, så bemærk at  $L_M < L$ .

### Passage med konstant acceleration

Symmetrien i figur 4 brydes, når farten ikke er konstant! Det ses på figur 6, som er grafen for den inducerede spænding, når stangmagnetten falder frit ned gennem spolen fra starthøjden 30 cm. Det er bemærkelsesværdigt, at den anden spændingstop er markant større end den første, og at den forekommer senere i forhold til  $U = 0$  end den første top. Da magneten accelererer, falder dens bagende hurtigere ud af spolen end dens forende falder ind i den, og med den hurtigere fluxændring overrasker det ikke at den inducerede spænding bliver større. Men burde

tidsintervallet  $\Delta t_2$  fra nulpunktet til den anden top ikke være kortere end tidsintervallet  $\Delta t_1$  fra første top til nulpunktet? Magnetten accelererer jo...

Fænomenet skyldes, at spændingstopene nu ikke – som ved konstant fart – opstår lige når magnetenderne passerer spolen, men lidt senere:

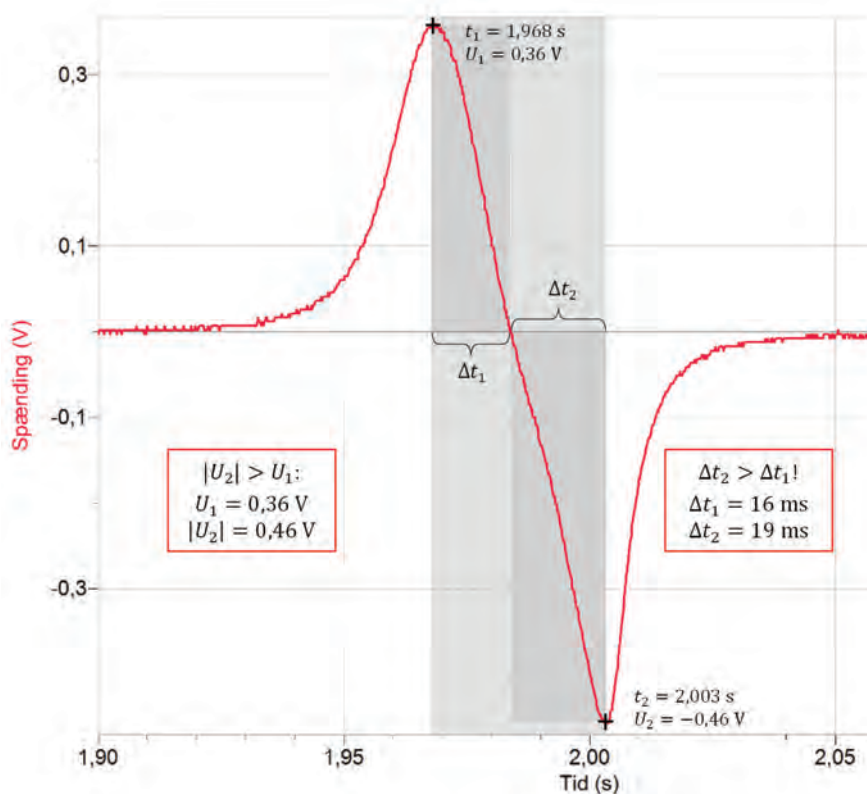
For en magnet, der falder frit fra højden  $h$ , er fluxen gennem spolen givet ved

$$\Phi(t) = \Phi_0(-x(t)) = \Phi_0\left(\frac{1}{2}gt^2 - h\right)$$

Differentiation giver

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\Phi}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\Phi_0}{dx} \cdot gt\right) \\ = \frac{d^2\Phi_0}{dx^2} \cdot (gt)^2 + \frac{d\Phi_0}{dx} \cdot g$$

og det følger, at



Figur 6

Induceret spænding fra en 10 cm lang stangmagnet sluppet fra  $h = 30$  cm (magnetmidte til spole). Magnetten bruger meget kort tid på at falde gennem spolen, så dataopsamlingsfrekvensen er høj: 5000 målinger/s. Forenden falder ind i spolen med fart 2,2 m/s og bagenden falder ud med fart 2,6 m/s. Den anden spændingstop er som forventet højere end den første:  $|U_2| > U_1$ . Derimod kan det virke overraskende, at den anden top kommer "for sent":  $\Delta t_2 > \Delta t_1$ .



$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left( -N \frac{d\Phi}{dt} \right) = -Ng \left( \frac{d^2\Phi_0}{dx^2} \cdot gt^2 + \frac{d\Phi_0}{dx} \right) \quad (4)$$

Når magnetens magnetforende ankommer til spolen er  $\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0$  og  $\frac{d\Phi_0}{dx} < 0$ . Iflg. (4) vil  $\frac{dU}{dt}$  derfor ikke være nul men positiv – så spændingen vil fortsætte med at stige lidt endnu, før den når sit maksimum. Helt tilsvarende ses, at  $U$  vil fortsætte med at aftage ned mod sit minimum endnu efter at magnetbagenden passerer spolen. Man kan altså sige, at begge spændingstoppe indtræffer lidt for sent i forhold til magnetendernes ankomst til spolen. Det forklarer dog stadig ikke hvorfor  $\Delta t_2 > \Delta t_1$ . Analysen kræver, at man løser ligningen  $\frac{dU}{dt} = 0$  med hensyn til  $t$ . Med (4) bliver ligningen til

$$\frac{d^2\Phi_0}{dx^2} = -\frac{1}{gt^2} \cdot \frac{d\Phi_0}{dx} \quad (5)$$

Man kan prøve med en Taylor-udvikling af  $\Phi_0$  til tredje orden omkring hvert af de to vendetangentpunkter, men det er ikke kønt, og jeg vil ikke forfølge det yderligere i denne artikel.

### Induceret spænding og faldhøjde

Hvordan afhænger størrelsen  $U_1$  af den første spændingstop af den højde  $h$  hvorfra magnetens midte falder? Forrige afsnit viser, at en præcis model er kompliceret. Men hvis vi – ikke helt urimeligt – antager at  $U_1$  indtræffer meget kort tid efter at magnetens magnetforende passerer spolen, så giver (3) at

$$U_1 \approx N \left( \frac{d\Phi_0}{dx} \right)_{\max} \cdot v \quad (6)$$

Med sit frie fald har magneten farten

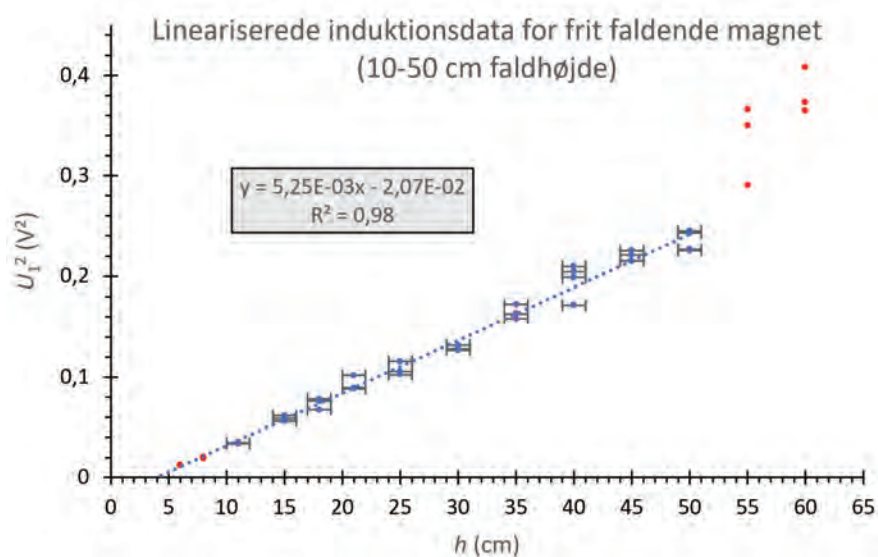
$$v = \sqrt{2g \left( h - \frac{L_M}{2} \right)}$$

når dens forreste magnetende når frem til spolen, så (6) medfører en forventning om at  $U_1^2$  er (omtrent) proportional med  $h - \frac{L_M}{2}$ . Data i en  $(h, U_1^2)$ -graf burde altså forløbe lineært og have førsteakseskæring i  $\frac{L_M}{2}$ .



Figur 7  
Forlængerrør hjælper magneten til at falde centralt og lodret, når faldhøjden er stor.

Figur 8  
Kvadratet på den maksimale spænding i den første induktionstop afhænger som forventet lineært af faldhøjden, i hvert fald så længe den ikke er for stor. Førsteakseskæringen på ca. 4 cm svarer til den halve magnetlængde.



Jeg har for hver faldhøjde  $h$  fundet  $U_1$  og  $\Delta t_1$  ved opmåling på  $(t, U)$ -grafen ligesom på figur 6. (Flyvetiderne analyseres i næste afsnit.) Det var ikke nemt at få magneten til at falde lige og midt ned gennem spolen når faldhøjderne var højere end ca. 50 cm, selv ikke når jeg som vist på figur 7 satte ”forlængerrør” oven på det paprør, som spolen var vundet op omkring. Faldhøjderne op til 50 cm bekræfter dog klart den lineære model for  $U_1^2$ , se figur 8. Førsteakseskæringen beregnes af regressionsdataene til  $\frac{0,0207}{0,00525} = 3,94$  cm, hvilket giver en magnetlængde på  $L_M = 7,9$  cm i god overensstemmelse med målingerne fra den jævnt bevægede magnet (Fig. 4). Endda passer det fint, at vi med denne metode bestemmer  $L_M$  lidt mindre end i forsøget med konstant fart: spændingstoppen ligger jo, som vi har set, en anelse for sent.

### Flyvetidsanalyse

Det er også muligt at lave en interessant analyse af flyvetidsmålingerne. Hvordan forventer vi, at tidsintervallet  $\Delta t_1$  fra den første spændingstop til spændingsnulpunktet afhænger af faldhøjden  $h$ ? Spørgsmålet er analogt til den velkendte kinematiske standardopgave: Hvis King Kong bruger 45 ms på at falde ned forbi et 2,0 m højt vindue, hvor meget højere oppe fra er han da faldet? (Svaret er 100 m.)

For at analysere de rå måledata i figur 9, må vi lave en model. Lad igen  $t_1$  være tidspunktet, hvor magnetforenden når frem til spolen, og  $t_0$  tidspunktet når  $U = 0$ . Så er

$$t_1^2 = \frac{2}{g} \left( h - \frac{L_M}{2} \right) \quad \text{og} \quad t_0^2 = \frac{2}{g} h$$

idet vi ser bort fra luftmodstand. Flyvetiden

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \frac{t_0^2 - t_1^2}{t_0 + t_1}$$

kan derfor skrives

$$\begin{aligned} \Delta t_1 &= \frac{1}{t_0 + t_1} \cdot \frac{2}{g} \cdot \left( h - \left( h - \frac{L_M}{2} \right) \right) \\ &= \frac{L_M}{g(t_0 + t_1)} \end{aligned}$$

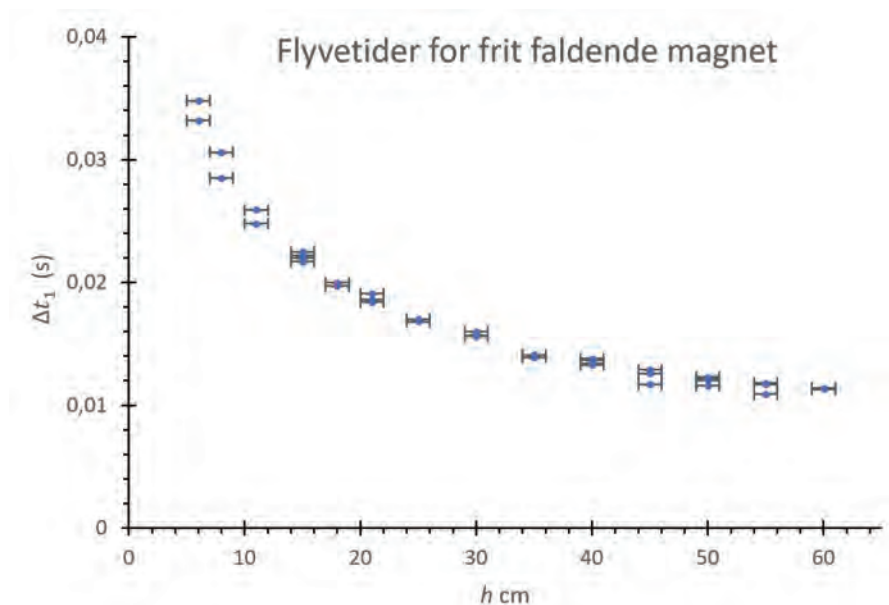
Da forskellen mellem  $t_0$  og  $t_1$  er lille, kan vi approksimere

$$t_0 + t_1 \approx 2t_0 = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

og så fås

$$(\Delta t_1)^2 = \frac{L_M^2}{8g} \cdot \frac{1}{h} \quad (7)$$

Jeg afbilder derfor kvadratet på de målte flyvetider,  $(\Delta t_1)^2$ , som funktion af den reciproke faldhøjde,  $\frac{1}{h}$ , og forventer at se data falde på en ret linje gennem (0, 0) og med hældning  $\frac{L_M^2}{8g}$ . Forventningen be-



Figur 9

Flyvetiden  $\Delta t_1$  måles fra første spændingstop til tidspunktet for  $U = 0$ . Den bliver mindre og mindre, jo højere oppe fra magneten falder.

kræftes smukt af figur 10, og med den observerede hældning  $7,19 \cdot 10^{-5} \text{ s}^2 \cdot \text{m}$  kan vi nu for tredje gang beregne magnetlængden:

$$\begin{aligned} L_M &= \sqrt{8 \cdot 9,82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 7,19 \cdot 10^{-5} \text{ s}^2 \cdot \text{m}} \\ &= 7,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Resultatet er igen i god overensstemmelse med de to tidligere bestemmelser af  $L_M$ , ikke mindst hvis man medtager den usikkerhed, der er på hældningskoefficienten i figur 10.

Figur 10

Linearisering af stangmagnetens flyvetidsdata. Sammenhængen er proportional som forventet, og hældningskoefficienten kan bruges til at beregne magnetens magnetlængde. Faldhøjderne er bestemt med en måleusikkerhed på 1 cm, og derfor bliver usikkerhedsintervallerne for  $1/h$  større når højderne bliver mindre. Det giver en vis usikkerhed på hældningskoefficienten og dermed også på værdien for  $L_M$ .

