

Banekurver for stjerner i en spiralgalakse

1) Bevis for at banekurven for en stjerne i en spiralgalakse ikke er en ellipse

Der optræder desværre en del misforståelser for hvordan banekurven for et legeme er i en spiralgalakse.

Denne lille artikel skulle gerne vise at banekurverne for stjerner i en spiralgalakse **ikke** er ellipser, men snarere ligner hypercykloider.

Først lidt om legemer, der kredser om en centralmasse:

Kraftpåvirkningen F_G mellem to legemer m og M , med afstand r imellem dem er

$$F_G = \frac{GmM}{r^2} \quad 1)$$

Den potentielle energi E_{pot} omkring en centralmasse M for et legeme med masse m i afstanden r er da

$F_G = \frac{dE_{\text{pot}}}{dr}$, og den potentielle energi er nul i det uendeligt fjerne:

$$E_{\text{pot}} = -\frac{GmM}{r} \quad 2)$$

Den kinetiske energi for et legeme med massen m og farten v er

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \quad 3)$$

Og dermed er den mekaniske energi $E_{\text{mek}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$:

$$E_{\text{mek}} = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}mv^2 \quad 4)$$

Centripetalkraften, hvor v er den **øjeblikkelige fart** og r_k er **krumningsradius** i bevægelsen, er:

$$F_c = \frac{mv^2}{r_k} \quad 5)$$

Hvis et lille legeme med massen m kredser omkring en større masse M , skal gravitationskraften levere den til bevægelsen nødvendige centripetalkraft F_c , også når legemet er nærmest eller fjernes fra den større masse, det er når v og r står vinkelret på hinanden.

$$F_G = F_c \quad 6)$$

5), 6) og 1) giver $\frac{GmM}{r^2} = \frac{mv^2}{r_k}$ eller

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{GmM}{r^2} \cdot r_k \quad 7)$$

Når v og r står vinkelret på hinanden kan energibevarelsen skrives

$$E_{\text{mek}} = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2} \frac{GmM}{r^2} \cdot r_k = C \quad 8)$$

Krumningsradius for en ellipse med storakse a , lilleakse b og excentricitet e , i perihel og ahel er

$$r_k = \frac{b^2}{a} = (1 - e^2) \cdot a \quad 9)$$

Afstanden fra det ene brændpunkt til perihel r_p er og til ahel r_a er

$$r_p = (1 - e) \cdot a \text{ og } r_a = (1 + e) \cdot a \quad 10)$$

Indsættes dette og 9) i 8) giver det denne nødvendige betingelse hvis et legeme bevæger sig i en ellipse omkring en masse i et af ellipsens brændpunkter:

$$-\frac{GmM}{ra} + \frac{1}{2} \frac{GmM}{(ra)^2} \cdot r_k = -\frac{GmM}{rp} + \frac{1}{2} \frac{GmM}{(rp)^2} \cdot r_k \text{ eller}$$

$$-\frac{GmM}{(1+e) \cdot a} + \frac{\frac{1}{2}GmM}{(1+e)^2 \cdot a^2} \cdot (1-e^2) \cdot a = -\frac{GmM}{(1-e) \cdot a} + \frac{\frac{1}{2}GmM}{(1-e)^2 \cdot a^2} \cdot (1-e^2) \cdot a$$

Der kan reduceres til

$$-\frac{1}{(1+e)} + \frac{\frac{1}{2}}{(1+e)^2} \cdot (1-e^2) = -\frac{1}{(1-e)} + \frac{\frac{1}{2}}{(1-e)^2} \cdot (1-e^2) \quad 11)$$

Det er det samme, der står på begge sider af lighedstegnet! Ses lettest ved at indsætte i Ti-Nspire

$$\frac{-1}{1+e} + \frac{0.5}{(1+e)^2} \cdot (1-e^2) = \frac{-1}{1-e} + \frac{0.5}{(1-e)^2} \cdot (1-e^2) \rightarrow \text{true} \triangle$$

Ikke overraskende er der **energibevarelse** hvis legemer bevæger sig **rundt i en ellipse om en centralmasse** i det ene brændpunkt. Et legeme, der bevæger sig rundt i en galakse hvor massen M vokser med afstanden til r centrum $M = k \cdot r$, hvor k er en konstant, bevæger sig ikke i en ellipse. Det vises i næste afsnit.

Legemer i bevægelse i en galakse hvor massen inden for radius r er proportional med afstanden til massemidtpunktet $M = k \cdot r$

Kraftpåvirkningen F_G på et legeme m i afstanden r fra centrum i en masse fordeling, hvor massen inden for radius r er proportional med afstanden r $M = k \cdot r$

$$F_G = \frac{Gmk \cdot r}{r^2} = \frac{Gmk}{r} \quad 12)$$

Den potentielle energi E_{pot} omkring en centralmasse M for et legeme med masse m i afstanden r er da $F_G = \frac{dE_{\text{pot}}}{dr}$:

$$E_{\text{pot}} = \int \frac{Gmk}{r} dr = Gmk \cdot \ln(r) + C1 = Gmk \cdot (\ln(r) + C2) = Gmk \cdot \ln(C3 \cdot r) \quad 13)$$

Hvor C1, C2 og C3 er konstanter, specielt er ΔE_{pot} imellem to afstande r1 og r2 fra centrum

$$\Delta E_{\text{pot}} = Gmk \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad 14)$$

Den kinetiske energi for et legeme med massen m og farten v er

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \quad 15)$$

Og dermed er den mekaniske energi $E_{\text{mek}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$:

$$E_{\text{mek}} = Gmk \cdot \ln(C3 \cdot r) + \frac{1}{2}mv^2 \quad 16)$$

Hvis et lille legeme med massen m kredser omkring centrum i en massefordeling, skal gravitationskraften levere den til bevægelsen nødvendige centripetalkraft F_c , når **v** og **r** står vinkelret på hinanden, det er når legemet er nærmest eller fjernest centralmassen.

$$F_G = F_c \quad 17)$$

5), 6) og 12) giver $\frac{Gmk}{r} = \frac{mv^2}{rk}$ eller

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{Gmk}{r} \cdot rk \quad 18)$$

Når **v** og **r** står vinkelret på hinanden kan energibevarelsen skrives

$$E_{\text{mek}} = Gmk \cdot \ln(C3 \cdot r) + \frac{1}{2} \frac{Gmk}{r} \cdot rk = C \quad 19)$$

Det antages i det følgende at legemet bevæger sig i en ellipse.

Indsættes dette og 9) i 8) giver det denne nødvendige betingelse hvis et legeme bevæger sig i en ellipse omkring en massefordeling med centrum i et af ellipsens brændpunkter:

$$Gmk \cdot \ln(C3 \cdot ra) + \frac{1}{2} \frac{Gmk}{ra} \cdot rk = Gmk \cdot \ln(C3 \cdot rp) + \frac{1}{2} \frac{Gmk}{rp} \cdot rk \text{ eller}$$

$$\ln(C3 \cdot ra) + \frac{1}{2 \cdot ra} \cdot rk = \ln(C3 \cdot rp) + \frac{1}{2rp} \cdot rk$$

$$\ln\left(\frac{ra}{rp}\right) = rk \cdot \left(\frac{1}{2rp} - \frac{1}{2ra}\right) \quad 20)$$

Det ses at hvis banekurven er en cirkel opfylder den 20) da $ra=rp=rk$ og $\ln(1)=0$

Indsættes 9) og 10) i 20) ovenstående bliver det til:

$$\ln\left(\frac{(1+e) \cdot a}{(1-e) \cdot a}\right) = (1-e^2) \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot (1-e) \cdot a} - \frac{1}{2(1+e) \cdot a}\right)$$

$$\ln\left(\frac{(1+e)}{(1-e)}\right) = \frac{1}{2} \cdot (1-e^2) \cdot \left(\frac{1}{(1-e)} - \frac{1}{(1+e)}\right) \ln\left(\frac{(1+e)}{(1-e)}\right) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot (1-e^2) \cdot \left(\frac{1+e}{(1-e^2)} - \frac{1-e}{(1-e^2)}\right)$$

$$\ln\left(\frac{(1+e)}{(1-e)}\right) = e \quad 21)$$

der har løsningen $e=0$, som er en cirkel! **Andre ellipser vil ikke give energibevarelse.**

2) Hvis legemerne ikke bevæger sig i en ellipse hvordan bevæger de sig så?

Laves der et lille dataprogram hvor et legeme bevæger sig i en galakse, hvor $M=k \cdot r$, vil banekurverne blive en cirkel hvis $FG=F_c$ eller $\frac{Gmk}{r} = \frac{mv^2}{r}$ der giver $v = \sqrt{Gk}$, og hypocykloide lignende kurver hvis $v \neq \sqrt{Gk}$. Jeg kalder dem snirkloider, da de ikke matematisk er hypocykloider

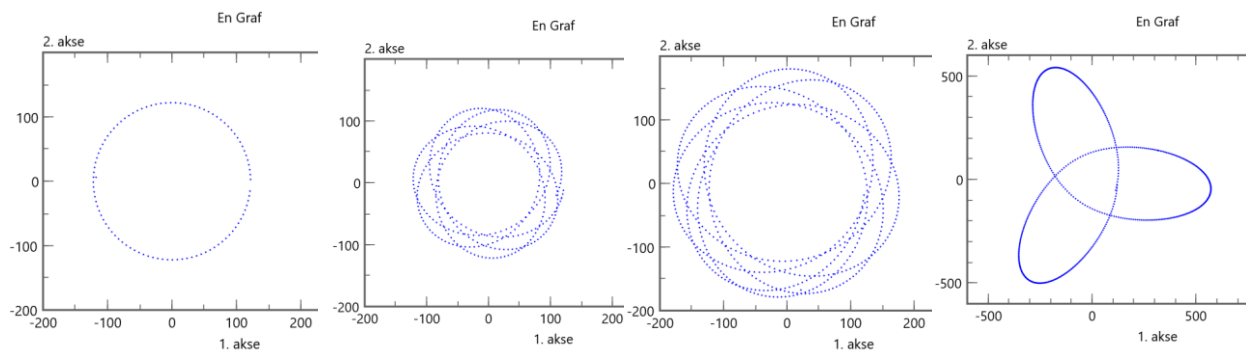


Fig 1

Fig 2

Fig 3

Fig4

Med $v = \sqrt{Gk}$ Med $v=0.8 \cdot \sqrt{Gk}$ Med $v = 1.2 \cdot \sqrt{Gk}$ Med $v = 1.8 \cdot \sqrt{Gk}$

Det eneste fysiske krav, der er lagt ind i dataprogrammet, er at kraften kan findes ved $\frac{Gmk}{r}$, og at legemet har en starthastighed.

Ved krumme banekurver er legemet udsat for en acceleration. Antallet af step i programmet er minimeret ved at regne accelerationen konstant i hvert step. Det gør antallet af step meget mindre end at bruge at hastigheden er konstant i hvert step.

3) Hastigheder og for meget masse?

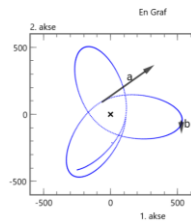


Fig 5

Ovenstående figur 5 viser hastighedsvektorerne for to punkter, når legemet er tættest på centrum v_a og når legemet er længst fra centrum v_b . Farten er hhv $|v_a| = 1.8 \cdot (20)^{0.5} = 8$ og $|v_b| = 1.7$. Hvis legemet bevægede sig i en cirkel omkring centrum skulle farten være $\sqrt{20} = 4.5$. Det ses at farten kan være meget større end cirkelbevægelsen skulle vise. **Det kunne se ud som om at der skulle være meget mere masse i galaksen når legemet er tættest på centrum og meget mindre masse når legemet er længst fra.** Forklaringen er at krumningsradius i bevægelsen skal bruges i formelen for centripetalkræfter $F_c = \frac{mv^2}{rk}$

4) Energi og impulsmomentbevarelse

| Søjletabel1 | | | | | | | | | |
|-------------|-------|--------|---------|--------|-------------------|---|---------------------------|---------------------|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 |
| Tekst | x | y | vx | vy | v fart | skalarP r,v | L/m=rxv | r | Emek/m-C |
| Navn | | | | | | | | | |
| Enhed | | | | | | | | | |
| Udtryk | A | B | C | D | $(C^2+D^2)^{0.5}$ | $(A \cdot C + B \cdot D) / ((A^2 + B^2)^{0.5} \cdot (C^2 + D^2)^{0.5})$ | $(A \cdot D - B \cdot C)$ | $(A^2 + B^2)^{0.5}$ | $10 \cdot \ln(A^2 + B^2) + 0.5 \cdot (C^2 + D^2)$ |
| 0 | | | | | | | | | 127.1 |
| 628 | 115.6 | 2.277 | -0.9644 | -7.960 | 8.019 | -0.1398 | -917.7 | 115.6 | 127.1 |
| 629 | 113.8 | -10.42 | -1.242 | -7.950 | 8.047 | -0.06358 | -917.7 | 114.3 | 127.1 |
| 630 | 111.6 | -23.08 | -1.519 | -7.909 | 8.054 | 0.01427 | -917.7 | 114.0 | 127.1 |
| 631 | 109.0 | -35.65 | -1.789 | -7.837 | 8.039 | 0.09175 | -917.7 | 114.6 | 127.1 |
| 632 | 105.9 | -48.09 | -2.046 | -7.737 | 8.003 | 0.1669 | -917.7 | 116.3 | 127.1 |

Fig 6

Fig 6 viser et udsnit af tabellen over punkterne mm dataprogrammet beregner. Punkternes koordinater er i kolonne 1 og 2, hastighedens koordinater i kolonne 3 og 4, farten i kolonne 5. Skalarproduktet mellem afstandsvektoren og hastighedsvektoren i kolonne 6 - når skalarproduktet er nul står de vinkelret på hinanden, i kolonne 7 Impulsmomentet delt med massen beregnet, det ses at det er konstant, kolonne 8 viser afstanden til centrum af galaksen. Kolonne 10 viser den mekaniske energi når den potentielle energi er givet ved 13)

Af Tabellen se det at impulsmomentet er bevaret og at den mekaniske energi er bevaret i dataprogrammet, selvom ingen af delene indgår direkte i programmeringen

Se også [Mælkevejen er en spiralgalakse](#)

En simulation af en spiralgalakse der ligner M74 [Spiralgalaksers udseende med ringe 1](#) og

[Tidlig udvikling af M74 spiralgalakse simulation](#)

Andre typer af spiralgalakser [Spiralgalakse med 4 arme tidlig udvikling. Ring og bjælke omkring](#)

Link til onedrive link af Fpro program [spiralgalakser simulation.FPR](#)