

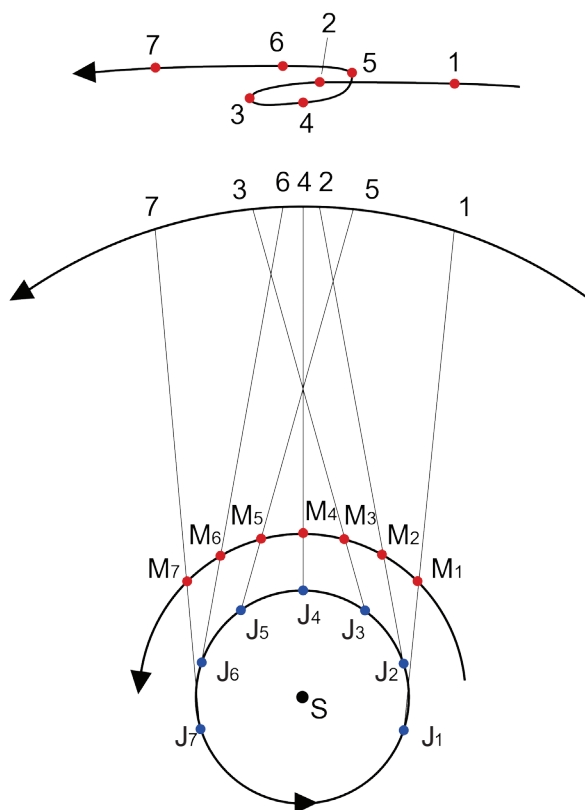
# Retrograd bevægelse

INDERMOHAN SINGH WALIA, Stenhus Gymnasium & HF

Retrograd bevægelse er et af de fænomener, som forklares elegant og simpelt vha. den kopernikanske model for Solsystemet, og der findes utallige animationer på nettet, der illustrerer situationen. Denne artikel handler om beregning af tidsperioden for den retrograde bevægelse. Beregning vil specifikt handle om iagttagelsen af retrogradbevægelsen af en ydre planet set fra en indre planet fx Mars iagttaget fra Jorden. Beregningerne tager udgangspunkt i, at planeterne udfører en cirkelbevægelse om Solen med forskellige omløbstider. Med Solen som origo i et retvinklet koordinatsystem haves, at stedvektoren  $\vec{R}_i(t)$  for den indre planet samt stedvektoren  $\vec{R}_y(t)$  for den ydre planet kan angives som følgende:

$$\vec{R}_i(t) = R_i \begin{pmatrix} \cos(\omega_i t) \\ \sin(\omega_i t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\vec{R}_y(t) = R_y \begin{pmatrix} \cos(\omega_y t) \\ \sin(\omega_y t) \end{pmatrix} \quad (2)$$



Figur 1

Da Mars' fart i banen omkring Solen er mindre end Jordens fart, vil Jorden overhale Mars indenom. Følger man retningen på sigtelinjerne fra Jorden til Mars i et tidsrum fremkommer Mars' tilsyneladende sløjfebevægelse.

$R_i$  og  $\omega_i = 2\pi/T_i$  angiver henholdsvis afstanden til Solen og vinkelhastighed for den indre planet, idet  $T_i$  er den indre planets omløbstid. Med indeks "y" haves de tilsvarende størrelser for den ydre planet. Vektoren  $\vec{R}_{iy}(t) = \vec{R}_y(t) - \vec{R}_i(t)$  angiver den relative position af den ydre planet observeret fra den indre planet.

$$\begin{aligned} \vec{R}_{iy}(t) &= \begin{pmatrix} R_y \cos(\omega_y t) - R_i \cos(\omega_i t) \\ R_y \sin(\omega_y t) - R_i \sin(\omega_i t) \end{pmatrix} \\ &= R_i \begin{pmatrix} \rho \cos(\omega_y t) - \cos(\omega_i t) \\ \rho \sin(\omega_y t) - \sin(\omega_i t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

Vi sætter  $\rho = R_y/R_i$ . Den ydre planets relative position til et tidspunkt  $t + \Delta t$ , dvs. lidt senere end  $t$ , beregnes som:

$$\vec{R}_{iy}(t + \Delta t) = R_i \begin{pmatrix} \rho \cos(\omega_y(t + \Delta t)) - \cos(\omega_i(t + \Delta t)) \\ \rho \sin(\omega_y(t + \Delta t)) - \sin(\omega_i(t + \Delta t)) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Omløbsretningen mellem vektorerne  $\vec{R}_{iy}(t)$  og  $\vec{R}_{iy}(t + \Delta t)$  bestemmes af fortegnet for determinanten af dette vektorpar. Vi har altså:

$$\begin{aligned} \det(\vec{R}_{iy}(t), \vec{R}_{iy}(t + \Delta t)) &= \\ &= \begin{vmatrix} R_i [\rho \cos(\omega_y t) - \cos(\omega_i t)] & R_i [\rho \cos(\omega_y(t + \Delta t)) - \cos(\omega_i(t + \Delta t))] \\ R_i [\rho \sin(\omega_y t) - \sin(\omega_i t)] & R_i [\rho \sin(\omega_y(t + \Delta t)) - \sin(\omega_i(t + \Delta t))] \end{vmatrix} = \\ &= R_i^2 [[\rho \cos(\omega_y t) - \cos(\omega_i t)][\rho \sin(\omega_y(t + \Delta t)) - \sin(\omega_i(t + \Delta t))] \\ &\quad - [\rho \sin(\omega_y t) - \sin(\omega_i t)][\rho \cos(\omega_y(t + \Delta t)) - \cos(\omega_i(t + \Delta t))]] = \\ &= R_i^2 [[\rho \cos(\omega_y t)][\rho \sin(\omega_y(t + \Delta t))] \\ &\quad - [\rho \cos(\omega_y t)][\sin(\omega_i(t + \Delta t))] - [\cos(\omega_i t)][\rho \sin(\omega_y(t + \Delta t))] \\ &\quad + [\cos(\omega_i t)][\sin(\omega_i(t + \Delta t))] - [\rho \sin(\omega_y t)][\rho \cos(\omega_y(t + \Delta t))] \\ &\quad + [\rho \sin(\omega_y t)]\cos(\omega_i(t + \Delta t))] \\ &\quad + [\sin(\omega_i t)][\rho \cos(\omega_y(t + \Delta t))] - [\sin(\omega_i t)][\cos(\omega_i(t + \Delta t))]] \end{aligned} \quad (5)$$

Additionsformlerne for de trigonometriske funktioner nemlig:

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

benyttes i (5) hvorved haves følgende:

$$\begin{aligned}
R_i^2 & [\rho^2 \cos(\omega_y t) [\sin(\omega_y \Delta t) \cos(\omega_y \Delta t) + \cos(\omega_y t) \sin(\omega_y \Delta t)] \\
& - \rho \cos(\omega_y t) [\sin(\omega_i t) \cos(\omega_i \Delta t) + \cos(\omega_i t) \sin(\omega_i \Delta t)] \\
& - \rho \cos(\omega_i t) [\sin(\omega_y t) \cos(\omega_y \Delta t) + \cos(\omega_y t) \sin(\omega_y \Delta t)] \\
& + \cos(\omega_i t) [\sin(\omega_i t) \cos(\omega_i \Delta t) + \cos(\omega_i t) \sin(\omega_i \Delta t)] \\
& - \rho^2 \sin(\omega_y t) [\cos(\omega_y t) \cos(\omega_y \Delta t) - \sin(\omega_y t) \sin(\omega_y \Delta t)] \\
& + \rho \sin(\omega_y t) [\cos(\omega_i t) \cos(\omega_i \Delta t) - \sin(\omega_i t) \sin(\omega_i \Delta t)] \\
& + \rho \sin(\omega_i t) [\cos(\omega_y t) \cos(\omega_y \Delta t) - \sin(\omega_y t) \sin(\omega_y \Delta t)] \\
& - \sin(\omega_i t) [\cos(\omega_i t) \cos(\omega_i \Delta t) - \sin(\omega_i t) \sin(\omega_i \Delta t)]]
\end{aligned} \quad (6)$$

Da  $\Delta t$  er en lille størrelse rækkeudvikles alle størrelser i (6) indeholdende  $\Delta t$  til 1. orden i  $\Delta t$ . Dermed haves følgende aproksimationer:

$$\cos(\omega_y \Delta t) \approx 1$$

$$\cos(\omega_i \Delta t) \approx 1$$

$$\sin(\omega_y \Delta t) \approx \omega_y \Delta t$$

$$\sin(\omega_i \Delta t) \approx \omega_i \Delta t$$

$$\begin{aligned}
R_i^2 & [\rho^2 \cos(\omega_y t) [\sin(\omega_y t) + \cos(\omega_y t) \omega_y \Delta t] \\
& - \rho \cos(\omega_y t) [\sin(\omega_i t) + \cos(\omega_i t) \omega_i \Delta t] \\
& - \rho \cos(\omega_i t) [\sin(\omega_y t) + \cos(\omega_y t) \omega_y \Delta t] \\
& + \cos(\omega_i t) [\sin(\omega_i t) + \cos(\omega_i t) \omega_i \Delta t] \\
& - \rho^2 \sin(\omega_y t) [\cos(\omega_y t) - \sin(\omega_y t) \omega_y \Delta t] \\
& + \rho \sin(\omega_y t) [\cos(\omega_i t) - \sin(\omega_i t) \omega_i \Delta t] \\
& + \rho \sin(\omega_i t) [\cos(\omega_y t) - \sin(\omega_y t) \omega_y \Delta t] \\
& - \sin(\omega_i t) [\cos(\omega_i t) - \sin(\omega_i t) \omega_i \Delta t]]
\end{aligned} \quad (7)$$

Ovenstående reduceres bl.a. ved at anvende grundrelationen  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$  for de trigonometriske funktioner, og dermed haves følgende:

$$\begin{aligned}
R_i^2 & [\rho^2 \omega_y \Delta t + \omega_i \Delta t - \rho \cos(\omega_y t) \cos(\omega_i t) (\omega_i + \omega_y) \Delta t \\
& - \rho \sin(\omega_y t) \sin(\omega_i t) (\omega_i + \omega_y) \Delta t]
\end{aligned}$$

Vi har altså at:

$$\begin{aligned}
\det(\overline{R_{iy}}(t), \overline{R_{iy}}(t + \Delta t)) = \\
R_i^2 \Delta t [\rho^2 \omega_y + \omega_i - \rho [\cos(\omega_y t) \cos(\omega_i t) \\
+ \sin(\omega_y t) \sin(\omega_i t)] (\omega_i + \omega_y)]
\end{aligned} \quad (8)$$

Når den ydre planet på nattehimlen udfører retrogradbevægelse, svarer det til at ovenstående determinant skifter fortegn fra fx positiv til negativ. Varigheden af den retrograde bevægelse

svares til tidsrummet, hvor determinanten fx er negativ. Lad os undersøge funktionen  $f(t)$  givet som:

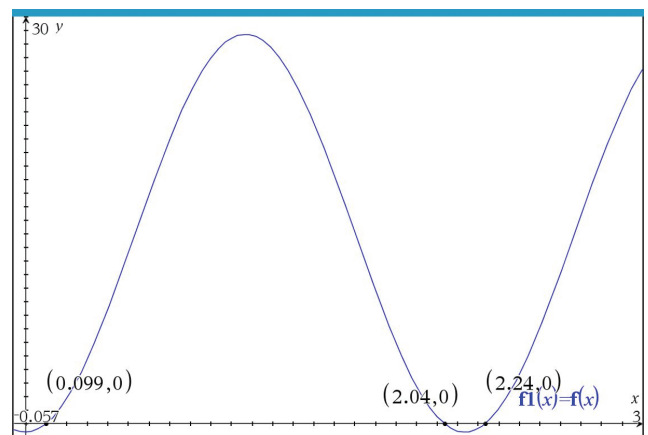
$$\begin{aligned}
f(t) &= \rho^2 \omega_y + \omega_i \\
&- \rho (\omega_i + \omega_y) [\cos(\omega_y t) \cos(\omega_i t) + \sin(\omega_y t) \sin(\omega_i t)]
\end{aligned} \quad (9)$$

med hensyn til fortegn og nulpunkter med Jorden som den indre planet og Mars som den ydre planet. Vi har følgende værdier for at fastlægge de forskellige parametre i ovenstående funktion:

$$\rho = \frac{R_{\text{Mars}}}{R_{\text{Jorden}}} = \frac{1,524 \text{ AE}}{1 \text{ AE}} = 1,524$$

$$\omega_i = \omega_{\text{Jorden}} = \frac{2\pi}{T_{\text{Jorden}}} = \frac{2\pi}{1 \text{ år}} = 2\pi \text{ år}^{-1} \approx 6,28 \text{ år}^{-1}$$

$$\omega_y = \omega_{\text{Mars}} = \frac{2\pi}{T_{\text{Mars}}} = \frac{2\pi}{1,88 \text{ år}} = \left( \frac{2\pi}{1,88} \right) \text{ år}^{-1} \approx 3,34 \text{ år}^{-1}$$



Her ses grafen for funktionen  $f$  for retrogradbevægelsen for Mars og af nulpunkterne ses, at varigheden af retrogradbevægelsen er  $\Delta t = (2,24 - 2,04) \text{ år} = 0,20 \text{ år} = 73 \text{ døgn}$ .

Københavns Universitets almanak angiver positioner for forskellige planeter, og for Mars haves for 1992 og 1993, at Mars påbegynder retrogradbevægelse 9/12–1992 og afslutter den 12/2–1993. Det giver et interval på 65 døgn med en usikkerhed på ca. 5 døgn, da kalenderen angiver planetpositioner hver 10. dag.

Specielt astrologihjemmesider har information om datoer for retrogradbevægelse, og netop denne information fra disse sider vil jeg ikke betvivle. Da retrogradbevægelse er en "unormal" situation, er denne periode for astrologer associeret med negativitet. Fra siden [astrology.com](http://astrology.com) haves, at varigheden af retrogradbevægelse for Mars i 2018 var ca. 62 døgn og i 2020

# ELEKTROMAGNETISMEN

## Bøger og udstilling på Steno Museet

Udstilling til og med 22. dec. 2021:

**H.C. Ørsted på ny – skønheden i naturen.** Udstillingen er udviklet af SNU, Selskabet for Naturlærens Udbredelse.

Bøger fra Steno Museets Venner:

Ole Knudsens **Elektromagnetisme 1820-1900** fortæller om den tidlige udforskning af elektromagnetismen.

**H.C. Ørsteds Selvbiografi** med efterskrift af Anja Skaar Jacobsen og Svend Larsen giver et godt indtryk af Ørsteds liv og tid.

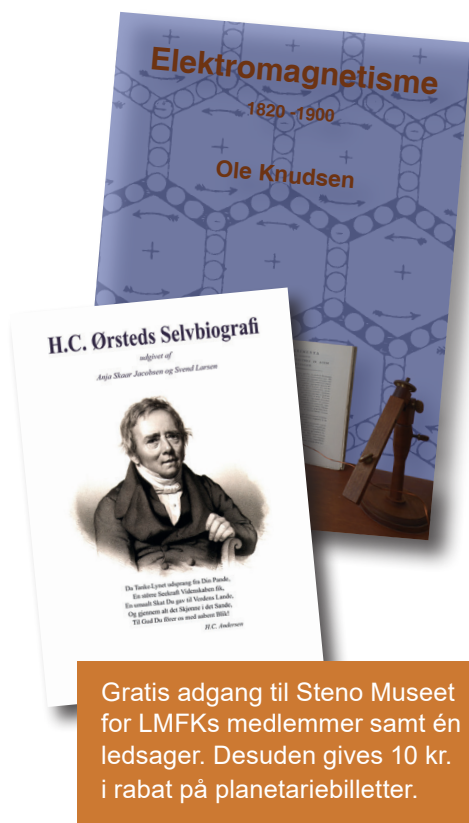
Bøgerne er velegnet til gymnasiets større skriftlige opgaver. De kan bl.a. købes på Steno Museet samt på [smv.ebog.dk](http://smv.ebog.dk). 15% rabat på klassesæt.

### RUNDVISNING OG FORMIDLINGSFORLØB

Se [sciencemuseerne.dk](http://sciencemuseerne.dk) eller ring til vores booking på 8715 5415, tirsdag-fredag kl. 10-14.

STENO MUSEET • C. F. Møllers Allé 2  
8000 Aarhus C • T: 8715 5415  
[www.sciencemuseerne.dk](http://www.sciencemuseerne.dk)

**SCIENCE  
MUSEERNE**  
AARHUS UNIVERSITET



Gratis adgang til Steno Museet for LMFKs medlemmer samt én ledsager. Desuden gives 10 kr. i rabat på planetariebilletter.

ca. 66 døgn. Uoverensstemmelse med mit resultat skyldes formentlig, at planetbevægelserne ikke er cirkulære men elliptiske og i særdeleshed for Mars, da banens excentricitet er noget større end for andre planeter bortset fra Merkur. En indisk astrologihjemmeside nemlig [astrosage.com](http://astrosage.com) har information om tidspunkter, endog med timer og minutter, for retrogradbevægelse for nogle af de andre planeter i 2021. Merkur har hele tre perioder med retrogradbevægelse med en varighed på ca. 22 døgn, og den sidste periode sluttede 18. oktober. Merkur er den romerske gud for kommunikation og handel, så jeg er ganske beroliget over at denne artikel ikke bliver udsendt i en af Merkurs retrogradperioder.

Ved iagttagelse af en indre planet fra en ydre planet er den relevante vektor  $\overline{R_{ji}}(t) = -\overline{R_{ij}}(t)$ , og dermed er den interessan-

te størrelse nemlig determinanten givet ved den samme formel (5) som før. Altså kan funktionen givet ved (9) benyttes uanset, om det er beregning af retrogradbevægelse for ydre eller indre planeter. I nedenstående tabel er angivet planeterens middelf afstand til Solen (målt i AE) samt omløbstid (målt i år) fra *Databog fysik kemi*. Med disse data kan funktionen  $f$  angives og af grafen for  $f$  bestemmes nulpunkter og dermed varigheden for tidsrummet, hvor  $f$  er negativ svarende til varigheden af retrogradbevægelsen  $\Delta t_{\text{teori}}$ . Data i den sidste kolonne  $\Delta t_{\text{obs}}$  er fra hjemmesiden [astrosage.com](http://astrosage.com), bortset fra værdien for Mars, som er omtalt tidligere. Der ses en rimelig overensstemmelse mellem teori og observationer, og som tidligere nævnt kan planetbanernes elliptiske form være årsagen til forskellen mellem de to resultater.

Planet	R AE	T år	$\Delta t_{\text{teori}}$ døgn	$\Delta t_{\text{obs}}$ døgn
Merkur	0,387	0,241	23	22 – 24
Venus	0,723	0,615	44	41
Jorden	1,000	1,000	—	—
Mars	1,524	1,881	70	66
Jupiter	5,203	11,862	122	120
Saturn	9,539	29,458	136	140
Uranus	19,18	84,014	152	
Neptun	30,06	164,793	157	