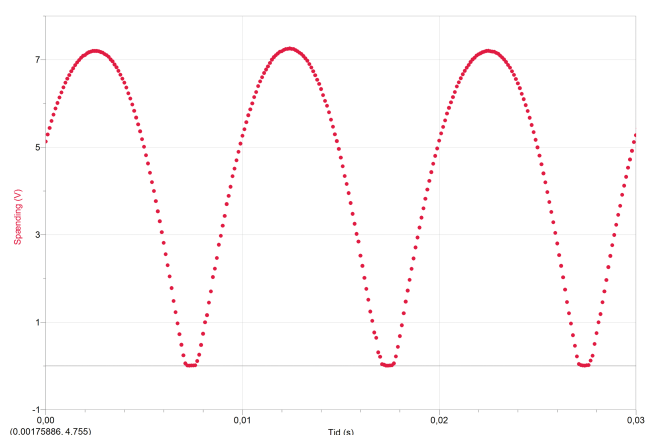


# Udglatning af pulserende jævnspænding

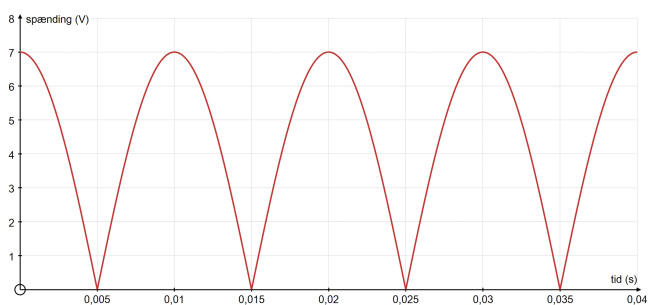
NIELS ERIK WEGGE og JOVANA TASHKOVSKA, Birkerød Gymnasium og IB

## Ensretning og udglatning

Når vekselspænding ensrettes i en diodebro, bliver den til pulserende jævnspænding som vist i figur 1. Vi tillader os at se stort på spændingstab over dioderne og de deraf følgende korte tidsintervaller med  $V = 0$  mellem hver puls, og modellerer derfor pulserne med funktionen  $V(t) = V_0 |\cos(\omega t)|$ . Her er  $V_0$  maksimalspændingen i hver puls,  $t$  tiden og  $\omega$  den indkommende vekselspændings vinkelfrekvens. I det følgende benyttes  $\omega = 2\pi f = 100\pi \text{ s}^{-1}$  svarende til det danske forsyningsnets 50 Hz frekvens. Når den indkommende vekselspænding er sinusformet, vil en voltmetermåling af spændingen som bekendt give root-mean-square værdien  $V_{\text{RMS}} = V_0 / \sqrt{2}$ .



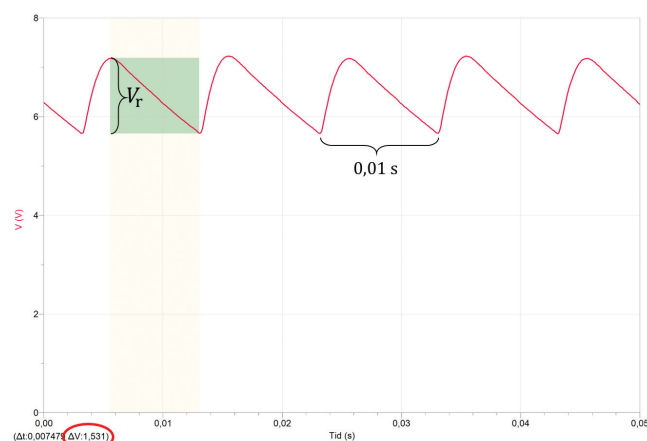
**Figur 1**  
LoggerPro-måling af udgangsspændingen fra en diodebro. Siliciumdioder har et ekstra spændingsfald på 0,7 volt, og derfor er der et kort, fladt stykke ved 0 V mellem hver puls.



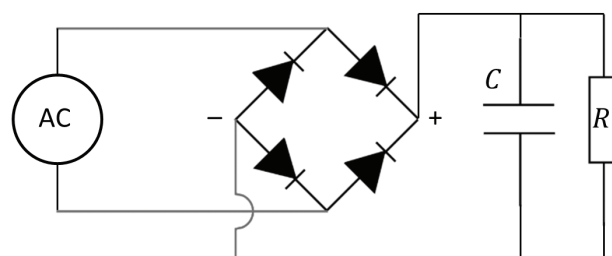
**Figur 2**  
Pulserende jævnspænding fra en idealiseret diodebro modelleret som  $V(t) = V_0 |\cos(100\pi t)|$ , svarende til maksimalværdien  $V_0 = 7 \text{ V}$  og indkommende AC-spænding med frekvens  $f = 50 \text{ Hz}$ . Der er 100 pulser pr. sekund.

De fleste elektroniske kredsløb kræver en nogenlunde konstant forsyningspænding, og derfor skal den pulserende DC-spænding glattes ud, så den i stedet for at svinge hele vejen op og ned mellem 0 og  $V_0$  kun varierer indenfor et passende toleran-

ceinterval. Intervallets bredde kaldes *ripple-spændingen*,  $V_r$ , sikkert fordi den udglattede vekselspænding kan ligne krusninger (*ripples*) på en overflade (figur 3).



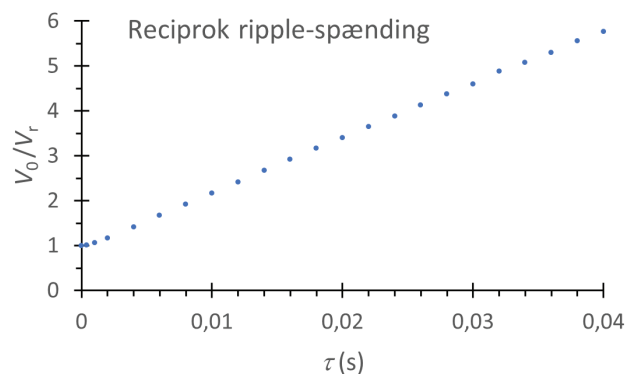
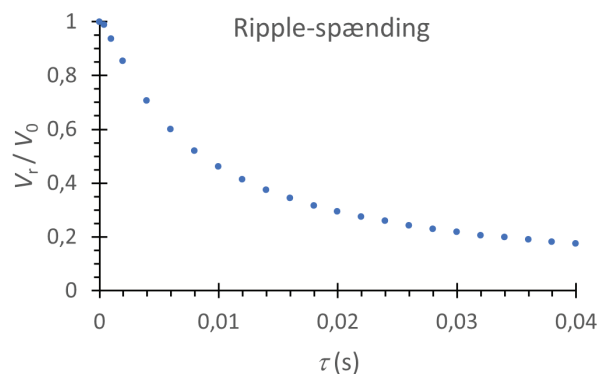
**Figur 3**  
Måling af delvist udglattet jævnspænding som varierer med ripple-spænding  $V_r \approx 1,5 \text{ V}$ . Perioden er 0,01 s svarende til 100 Hz (det dobbelte af AC-frekvensen).



**Figur 4**  
Kredsløbsdiagram for kapacitorudglatning af pulserende jævnspænding fra en diodebro. Resistoren repræsenterer den ydre belastning.

Udglatningen kan helt simpelt foretages med en kapacitor placeret parallelt over udgangen som vist på figur 4. I første halvdel af hver puls lades kapacitoren fuldt op, og i løbet af pulsens anden halvdel fungerer den kortvarigt som et slags batteri. Det er klart, at hvis man har behov for en meget lille ripple-spænding (meget små krusninger), så skal man benytte en meget stor kapacitor. Men hvor stor? De fleste kilder (som fx den autoritative [1]) stiller sig mærkeligt nok tilfreds med den stærkt simplificerede model

$$V_r = \frac{V_0}{2fRC} \quad (1)$$



Figur 5

Måledata med belastningsresistans  $R = 2000 \, \Omega$  og varierende tidskonstant  $\tau = RC$ . Ripple-spændingen aftager fra værdien  $V_r = V_0$  og går asymptotisk mod 0, når udglatningskapacitansen  $C$  øges. Den reciproke ripple-spænding vokser forbløffende lineært med kapacitansen, bortset fra ved de allermindste  $\tau$ -værdier.

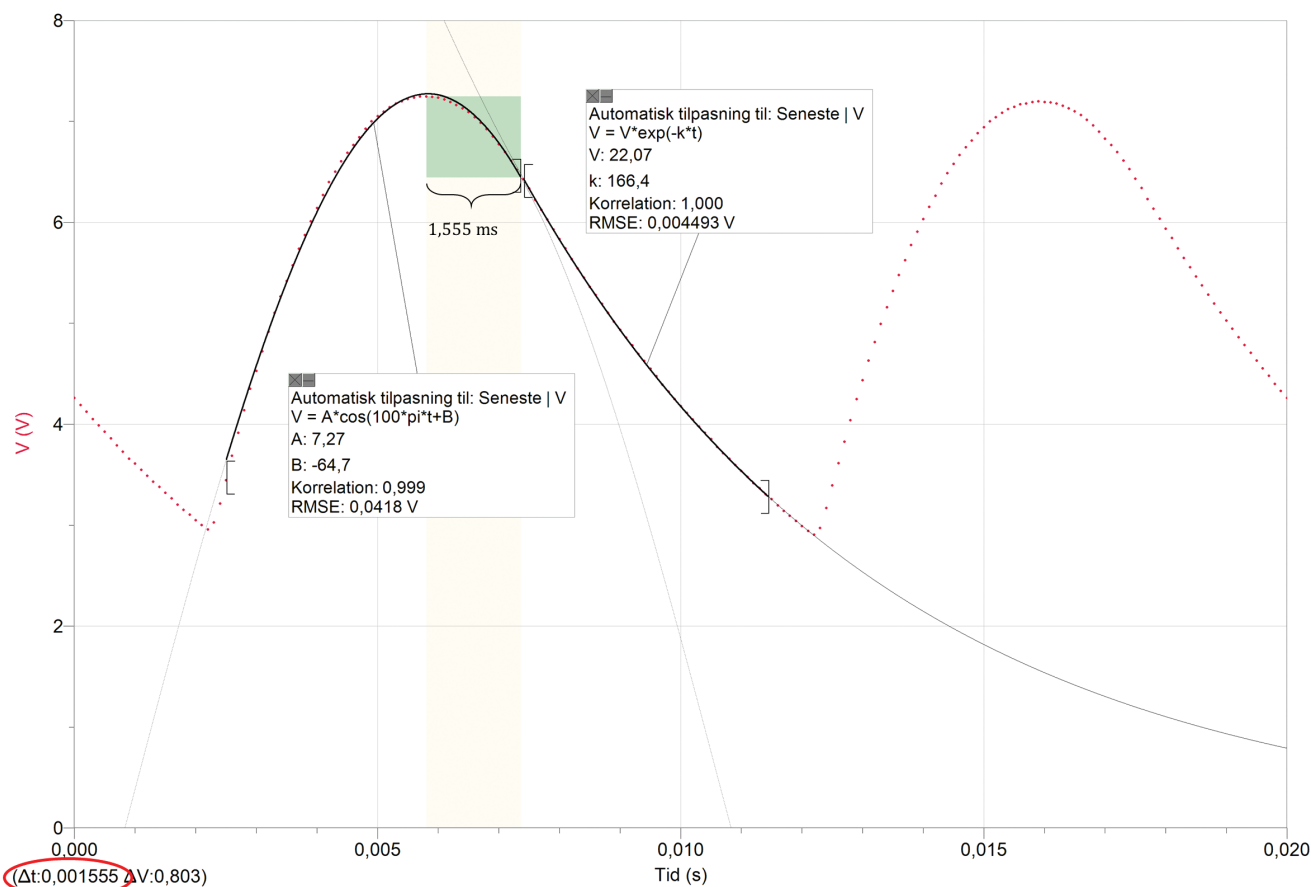
hvor  $R$  er den effektive belastningsresistans svarende til den strøm, der trækkes fra spændingsforsyningen,  $f$  er den indgående vekselspændings frekvens og  $C$  er udglatningskapacitansen parallelt med  $R$ . Den grove model forudsiger korrekt, at  $V_r \rightarrow 0$  når  $C \rightarrow \infty$ , men  $V_r$  er jo lig med  $V_0$ , når der ikke er tilkoblet nogen kapacitor, så modellen bryder sammen for  $C \rightarrow 0$ . Når  $C$  ikke er alt for lille, giver (1) tåleligt acceptable men altid ukorrekte værdier for  $V_r$  (se tabel 1). I praksis er det ikke noget stort problem, fordi man blot overdimensionerer udglatningskapacitoren. I denne artikel vil vi dog være mere ambitiøse og opstille og teste en meget mere præcis model, nemlig

$$V_r = \frac{V_0}{1 + \frac{\pi}{\pi/2 + 1} \cdot 2fRC} \quad (2)$$

Et-tallet i nævneren sikrer den korrekte konvergens når  $C \rightarrow 0$ , og faktoren  $\frac{\pi}{\pi/2 + 1} \doteq 1,22$  foran  $2fRC$  medfører, som vi skal se,

Figur 6

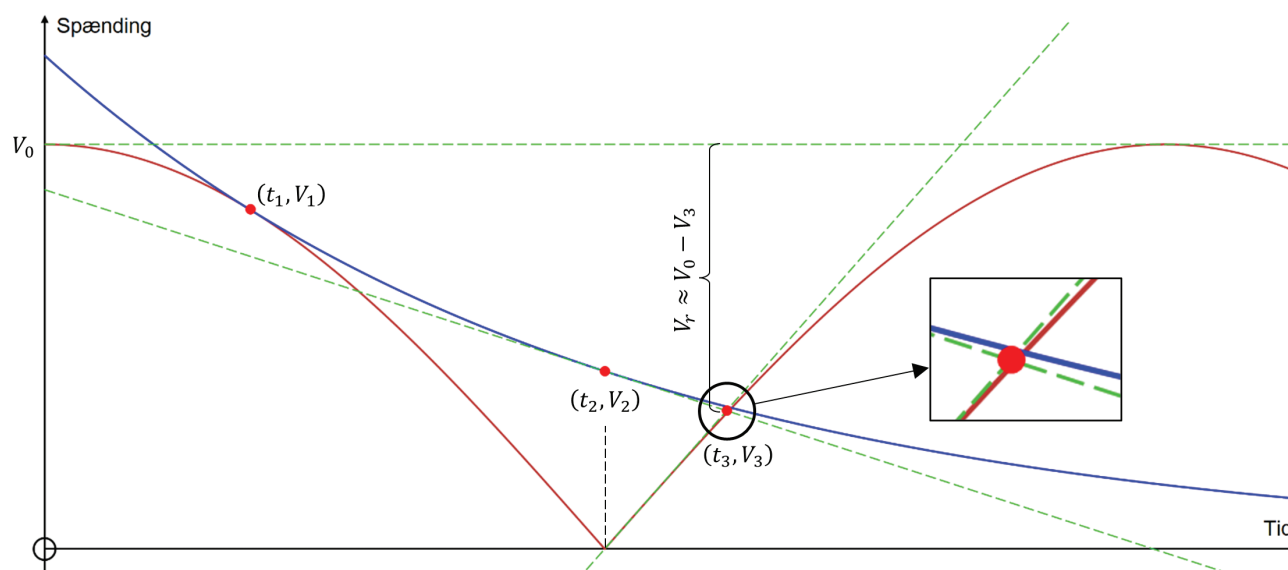
Måling af udgangsspændingen med belastningsresistans  $R = 2000 \, \Omega$  og udglatningskapacitans  $C = 3,00 \, \mu\text{F}$ . Der er målt 5000 gange i sekundet. Bemærk at den første del af kurven fittes fint af en cos-funktion, mens afladningsdelen – som man kan se starter 1,555 ms efter maksimum – er eksponentiel med  $k = 166,4 \, \text{s}^{-1}$ . Værdien passer med den forventede værdi  $\frac{1}{RC} = \frac{1}{2 \, \text{k}\Omega \cdot 3 \, \mu\text{F}} = 166,7 \, \text{s}^{-1}$ .



generelt meget bedre værdier for ripple-spændingen end dem man får fra (1).

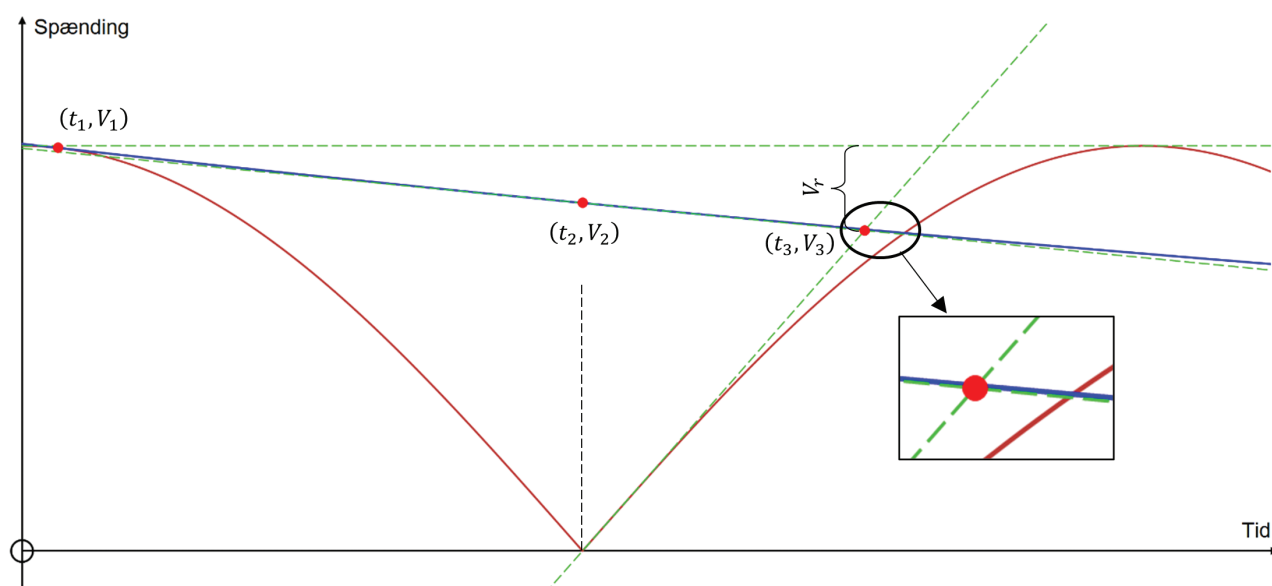
Projektet tager udgangspunkt i det *Extended Essay* i fysik som den ene forfatter skrev i forbindelse med sin IB-eksamen<sup>1)</sup> på Birkerød Gymnasium [2]. Data fra hendes målinger af ripple-spændingen ved forskellige kapacitanser (figur 5) viste sig til vores overraskelse at kunne lineariseres meget smukt, på trods af den ganske komplicerede matematik vi vidste måtte indgå i modelleringen. Vores nysgerrighed var tændt! Hvor i modeleringsprocessen ville kompleksiteten kollapse, så der kunne gives et så simpelt svar på det komplicerede spørgsmål om ripple-spændingens afhængighed af udglatningskapacitansen?

Måledata i figur 6 og modellen i figur 7 og 8 viser hvordan udgangsspændingen  $V$  over parallelkoblingen af kapacitor og belastningsresistans som ventet følges med den cosinus-formede spænding op til maksimumværdien  $V_0$  og lidt ned igen efter toppen – indtil punktet  $(t_1, V_1)$ , hvor cosinus-spændingen begynder at aftage hurtigere end kapacitoren ville aflade. Fra dette punkt følger udgangsspændingen den eksponentielle afladningskurve  $V_C(t) = V_1 e^{-k(t-t_1)}$  for kapacitoren ( $k = 1/RC$ ), indtil kurven i punktet  $(t_3, V_3)$  møder den opadgående cosinus-kurve i starten af den næste puls. Undervejs har afladningskurven passeret midterpunktet  $(t_2, V_2)$ , hvor  $t_2 = \frac{\pi}{2\omega} = 0,005$  s. For at udregne ripple-spændingen  $V_r = V_0 - V_3$  bestemmer vi nu først hvert af de tre punkter  $(t_1, V_1)$ ,  $(t_2, V_2)$  og  $(t_3, V_3)$ .



**Figur 7**  
Spændingskurven overgår fra diodebroens pulserende jævnstrøm (rød graf) til kapacitorens eksponentielle afladningsgraf (blå) ved tiden  $t_1$ . Ripple-spændingen skal beregnes ud fra det efterfølgende skæringspunkt mellem den blå og den røde graf. For nemheds skyld fortsætter vi fra midterpunktet  $(t_2, V_2)$  ad den stiplede tangent indtil denne møder den anden stiplede tangent i et punkt  $(t_3, V_3)$ , som viser sig at være meget tæt på det ønskede skæringspunkt. Ripple-spændingen kan således med god tilnærmelse beregnes som afstanden fra  $V_3$  op til maksimalværdien  $V_0$ .

**Figur 8**  
Som figur 7, nu blot med større værdi af  $\tau$ , så ripple-spændingen er mindre. Bemærk at skæringspunktet  $(t_3, V_3)$  mellem tangenterne nu ligger en hel del for tidligt i forhold til skæringspunktet mellem eksponentialgraf (blå) og opladningskurve (rød), men at  $V_3$  alligevel er tæt på den rigtige værdi.



## Vernier® Go Direct™ trådløse sensorer

### Pyranometer

Måler effekten af elektromagnetisk stråling i watt per kvadratmeter. Det er følsomt til nær infrarød, synlig og UV-stråling, hvor 90% af solenergien er koncentreret.

Best.nr. GDX-PYR

**GODIRECT PRIS kr. 4.187,-**

### Kraftplatform

Måler de udviklede kræfter under stepping, hop og andre menneskelige handlinger.

Observer legemets forandringer i vægt, f.eks. mens du kører i elevator eller læner dig op ad en væg...

Best.nr. GDX-PP

**GODIRECT PRIS kr. 5.587,-**

### Spektrofotometer

GoDirect "SpectroVis+" måler absorbens, transmission, fluorescens og intensitet. Bølgelængde: 380-950nm.

Fluorescens: 405 nm og 500 nm.

Best.nr. GDX-SVISPL

**GODIRECT PRIS kr. 6.495,-**

### Fiberkabel til måling af emissionsspektre

Best.nr. VSP-FIBER **GODIRECT PRIS kr. 1.107,-**

### Kraftsensor

- og accelerations-sensor

Kraftmåleområde: +/- 0,1 N til +/- 50 N

Accelerationsmåleområde: 3 akser +/- 16g

Gyroskop: 3 akser 2000°/s

Best.nr. GDX-FOR

**GODIRECT PRIS kr. 1.667,-**

## fable GO! robot

**Dette sæt giver dig alt det grundlæggende til en omfattende start med robotteknologi...**

Det inkluderer et Spin modul med sensorer, lys, sjovt tilbehør og meget mere. Med Fable Go! er du klar til sjov, direkte fra kassen...

Best.nr. 40020025

**BESTSELLERPRIS kr. 4.752,-**



Shape  
Robotics

Officiel forhandler  
i Danmark

## fable Explore! robot

**The Fable Explore Set giver dig mulighed for at lære Fable at kende på en anden måde...**

Den kan bruges af 1-3 brugere i en gruppe

Best.nr. 99002001

**BESTSELLERPRIS kr. 4.752,-**



## Vernier® Graphical Analysis PRO

### LOGGERPRO's ARVTAGER!

Nu kan du oprette eksperimenter og dele dine data med eleverne i realtid. Graphical Analysis PRO fra Vernier synkroniserer video med sensordata og giver eleverne mulighed for at forbinde de abstrakte begreber til oplevelser i den virkelige verden...

**Skolelicens for 1 eller 3 år:**

Best.nr. GAP-1YR

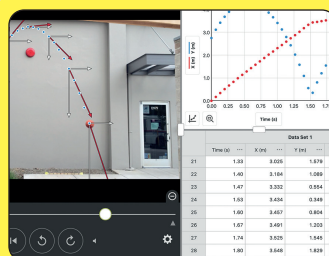
**BESTSELLERPRIS kr. 1.500,-**

Best.nr. GAP-3YR

**BESTSELLERPRIS kr. 3.000,-**



**PÅ DANSK**



## Vernier® Video Analysis

**- som kan måle og analysere bevægelser i videoer**

Video Analysis er perfekt til fysikundervisningen, og kan bruges på alle enheder - uanset om man bruger en PC, Mac eller Chromebook. Vernier Video Analysis er en webbaseret løsning, som fungerer i alle browsere, og den kan også downloades som en webapp. Programmet kan måle hastighed, acceleration, afstand og tid, og hjælper eleverne med at indsamle data og lave grafer. Derved kan eleverne forstå fysiske love og bevægelser bedre end nogensinde før...

**Skolelicens for 1 eller 3 år:**

Best.nr. VVA-1YR

**BESTSELLERPRIS kr. 2.500,-**

Best.nr. VVA-3YR

**BESTSELLERPRIS kr. 5.000,-**

Alle priser og tilbud er excl. moms og gældende indtil andet angives

**Mød os på BigBang25 - vi er der hvor vi plejer at være!**

**skolebutik.dk**

Se mere på vores webshop  
[www.skolebutik.dk](http://www.skolebutik.dk)  
- eller ring 4470 4000

Familiedrevet siden 1987...





**Bestemmelse af punktet  $(t_1, V_1)$** 

Til tiden  $t = t_1$  vil cosinus-grafen  $V_{\cos}(t) = V_0 |\cos(\omega t)|$  have samme hældning som eksponential-grafen  $V_C(t) = V_1 e^{-k(t-t_1)}$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} V_{\cos}(t) &= \frac{d}{dt} V_C(t) \\ -\omega V_0 \sin(\omega t) &= -k V_1 e^{-k(t-t_1)}\end{aligned}$$

Med  $t = t_1$  og  $V_1 = V_0 \cos(\omega t_1)$  fås

$$\omega V_0 \sin(\omega t_1) = k V_0 \cos(\omega t_1)$$

Det følger at  $\tan(\omega t_1) = \frac{k}{\omega}$  og dermed

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \tan^{-1}\left(\frac{k}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega\tau}\right) \quad (3)$$

idet vi har indført tidskonstanten  $\tau = RC = \frac{1}{k}$  for parallelkoblingen af kapacitor og resistor.

Nu kan vi beregne den tilhørende spænding:

$$V_1 = V_0 \cos(\omega t_1) = V_0 \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega\tau}\right)\right) = \frac{V_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}}} \quad (4)$$

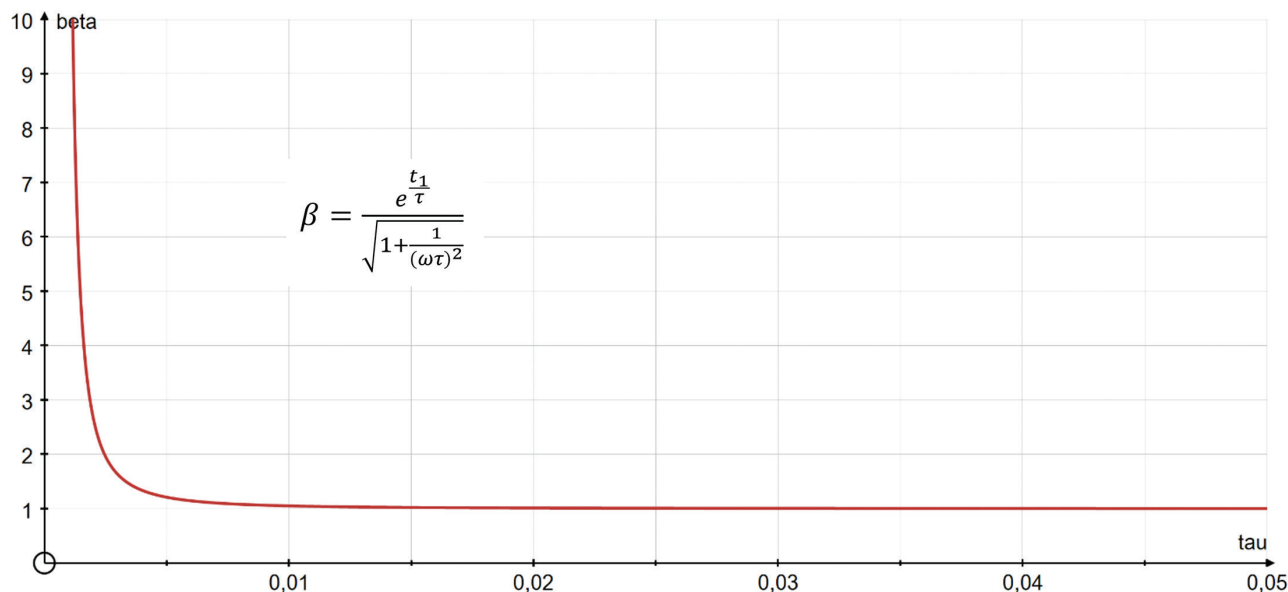
Det sidste lighedstegn i (4) udnytter identiteten

$$\cos(\tan^{-1}(y)) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

som let etableres ved en betragtning af enhedscirklen og hermed overlades til læseren (eller en af læserens dygtige elever).

Figur 9

Korrektionsfaktoren  $\beta$  fra formel (5) og (6). Funktionen konvergerer hurtigt mod 1 for  $\tau \rightarrow \infty$ , men når  $\tau \leq 0,005$  s (som er et interessant område), er  $\beta$  meget stor og vokser voldsomt mod  $\infty$  for  $\tau \rightarrow 0$ .



Bemærk at tidspunktet  $t_1$ , hvor kapacitoren ”tager over”, er uafhængigt af maksimalspændingen  $V_0$ , og at  $V_1$  ifølge (4) går mod henholdsvis 0 og  $V_0$  som ønsket, når  $\tau = RC$  går mod henholdsvis 0 og  $\infty$ .

**Bestemmelse af punktet  $(t_2, V_2)$** 

Med AC-frekvensen 50 Hz er  $t_2 = 0,005$  s, men vi vil bruge det generelle udtryk  $t_2 = \frac{\pi}{2\omega}$ . Til tiden  $t_2$  er spændingen faldet til

$$\begin{aligned}V_2 &= V_1 e^{-k(t_2-t_1)} = V_1 e^{\frac{t_1}{\tau}} e^{-\frac{t_2}{\tau}}, \text{ som vi kan skrive på den simple form} \\ V_2 &= V_0 \beta e^{-\frac{t_2}{\tau}}\end{aligned} \quad (5)$$

ved at indføre den dimensionsløse (men  $\tau$ -afhængige) korrektionsfaktor

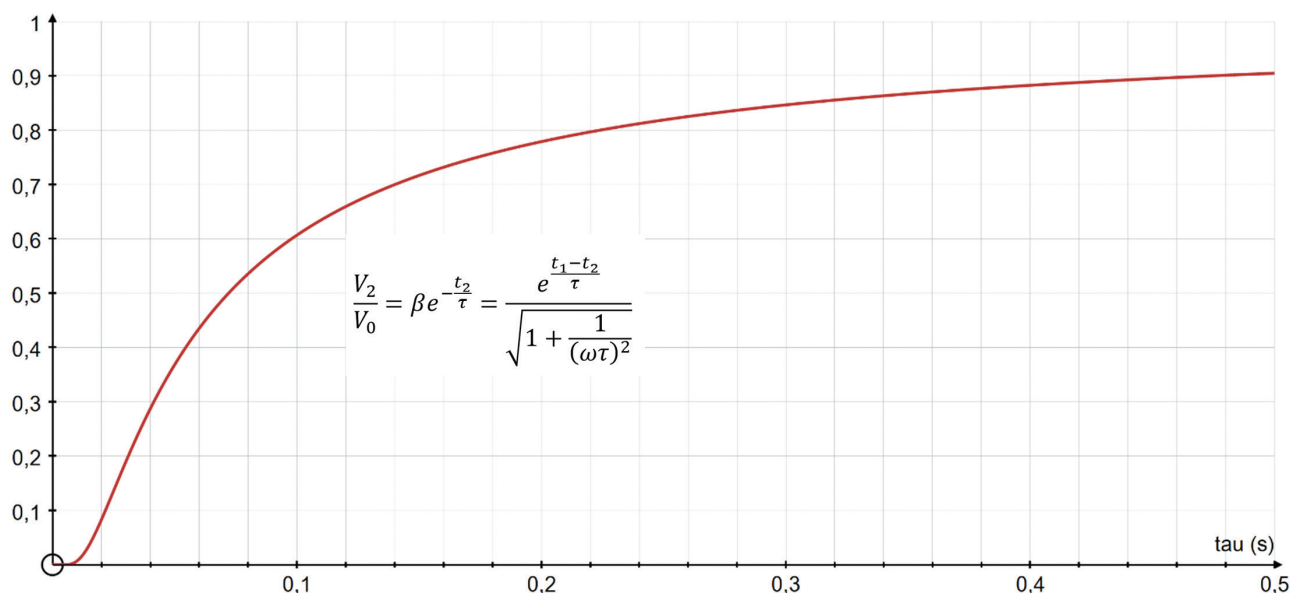
$$\beta = \frac{e^{\frac{t_1}{\tau}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}}} \quad (6)$$

Grænseværdierne  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \beta = 1$  og  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \beta = \infty$  er algebraisk oplagte fra (6) og ses også på grafen figur 9. På samme måde er det let at se (både algebraisk og på figur 10), at den asymptotiske opførsel af  $V_2$  er som forventet:  $V_2$  går mod henholdsvis 0 og  $V_0$ , når  $\tau$  går mod henholdsvis 0 og  $\infty$ .

**Bestemmelse af punktet  $(t_3, V_3)$ .**

Ideelt set skal vi fortsætte fra det netop bestemte punkt  $(t_2, V_2)$  ad eksponential-grafen  $V_C(t) = V_2 e^{-k(t-t_2)}$  indtil vi møder cos-grafen  $V_{\cos}(t) = V_0 |\cos(\omega t_3)|$ . For at finde skæringspunktet, skal vi løse den transcendentale ligning  $V_2 e^{-k(t_3-t_2)} = V_0 |\cos(\omega t_3)|$ , og selv hvis vi havde haft et simpelt udtryk for  $V_2$ , så er det en håbløs opgave.

I stedet vælger vi at gå det sidste lille stykke fra  $t_2$  langs tangenten til eksponential-grafen og approksimativt bestemme  $t_3$  som det sted, hvor denne tangent krydser tangenten for cos-grafen ud fra punktet  $(t_2, 0)$ . Vi laver altså Taylor-udvikling



Figur 10

Graf over  $V_2/V_0$  som beregnet fra (5) og (6). Bemærk den forventede asymptotiske opførsel for  $\tau \rightarrow 0$  og  $\tau \rightarrow \infty$ . Bemærk også tidsskalaen: konvergenzen  $V_2 \rightarrow V_0$  er meget langsom (i vores forsøg er  $\tau < 0,05$  s).

til første orden af de to grafer omkring  $t = t_2$ . Punktet hvor de to tangenter krydser hinanden ligger overordentligt tæt på  $(t_3, V_3)$ , se figur 7 og 8.

Taylor-udvikling af  $V_c(t) = V_2 e^{-k(t-t_2)}$  omkring  $t = t_2$ :

$$V_c(t) \approx -kV_2(t-t_2) + V_2 \quad (7)$$

På samme måde findes tangentligningen til  $\cos$ -grafen, idet vi dog skal huske, at  $V_{\cos}(t) = V_0 |\cos(\omega t)| = -V_0 \cos(\omega t)$  når  $t_2 < t < t_3$ :

$$V_{\cos}(t) \approx \omega V_0 \sin(\omega t_2)(t-t_2) + V_{\cos}(t_2) = \omega V_0(t-t_2) \quad (8)$$

Her har vi benyttet, at  $\sin(\omega t_2) = 1$  og  $V_{\cos}(t_2) = 0$ .

Vi ser fra (7) og (8), at de to tangenter krydser hinanden ved tiden  $t$  givet ved

$$-kV_2(t-t_2) + V_2 = \omega V_0(t-t_2) \quad (9)$$

som umiddelbart kan løses til  $t-t_2 = \frac{V_2}{\omega V_0 + kV_2}$ .

Antager vi nu, at  $t \approx t_3$  fås

$$V_3 \approx \omega V_0(t_3-t_2) \approx \frac{\omega V_0 V_2}{\omega V_0 + kV_2} \quad (10)$$

Denne spænding afhænger på kompliceret vis af  $\tau$ , som gemmer sig både i  $k = 1/\tau$  og (ikke mindst) i  $V_2$ . Alligevel er det oplagt, at den asymptotiske opførsel er som den skal være: Når  $\tau \rightarrow 0$ , så vil  $k \rightarrow \infty$ , og dermed  $V_3 \rightarrow 0$ . Tilsvarende ses, at når  $\tau \rightarrow \infty$ , så vil  $k \rightarrow 0$ , og dermed  $V_3 \rightarrow V_0$  (fordi  $V_2 \rightarrow V_0$ ).

### Kulmination:

#### Beregning af den reciprokke ripple-spænding

Data har vist os, at den reciprokke ripple-spænding  $V_0/V_r$  er en overbevisende lineær funktion af  $\tau$  (figur 5). Vi benytter derfor nu de foregående komplicerede udtryk og approksimationer til at opstille en teoretisk model for  $V_0/V_r$  i håbet om, at den simple, observerede linearitet dukker frem trods den matematiske kompleksitet. Først bruger vi udtrykket (10) for  $V_3$ :

$$\begin{aligned} \frac{V_0}{V_r} &= \frac{V_0}{V_0 - V_3} = \frac{1}{1 - \frac{V_3}{V_0}} = \frac{1}{1 - \frac{\omega V_2}{\omega V_0 + kV_2}} \\ &= \frac{\omega V_0 + kV_2}{\omega V_0 + kV_2 - \omega V_2} = \frac{\omega V_0 + kV_2 - \omega V_2 + \omega V_2}{\omega V_0 + kV_2 - \omega V_2} \\ &= 1 + \frac{\omega V_2}{\omega V_0 + (k - \omega)V_2} \end{aligned}$$

Heri indsættes udtrykket (5) for  $V_2$ :

$$\frac{V_0}{V_r} = 1 + \frac{\omega V_0 \beta e^{-kt_2}}{\omega V_0 + (k - \omega)V_0 \beta e^{-kt_2}} = 1 + \frac{\omega \beta}{\omega e^{kt_2} + (k - \omega)\beta}$$

Vi forlænger brøken med  $\tau = \frac{1}{k}$ :

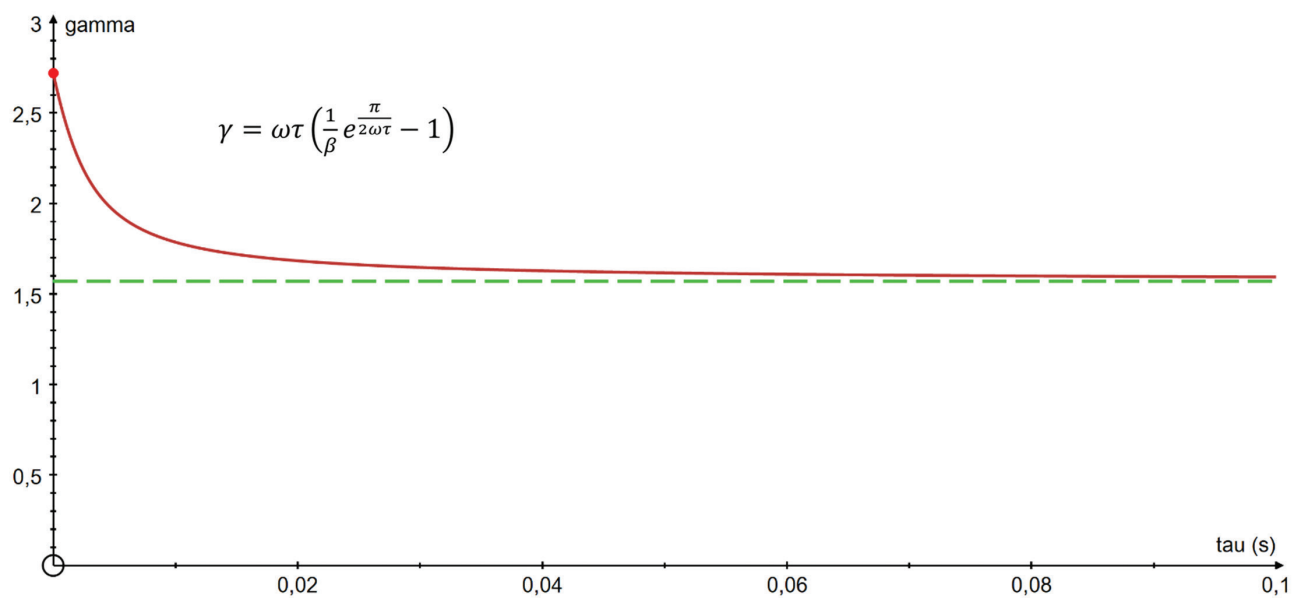
$$\frac{V_0}{V_r} = 1 + \frac{\omega \beta \tau}{\omega \tau e^{kt_2} + (1 - \omega \tau)\beta} = 1 + \frac{\omega \tau}{\omega \tau \left( \frac{1}{\beta} e^{\frac{t_2}{\tau}} - 1 \right) + 1} \quad (11)$$

Med den tilsyneladende stærkt  $\tau$ -afhængige parameter

$$\gamma = \omega \tau \left( \frac{1}{\beta} e^{\frac{t_2}{\tau}} - 1 \right) = \omega \tau \left( \frac{1}{\beta} e^{\frac{\pi}{2\omega\tau}} - 1 \right) \quad (12)$$

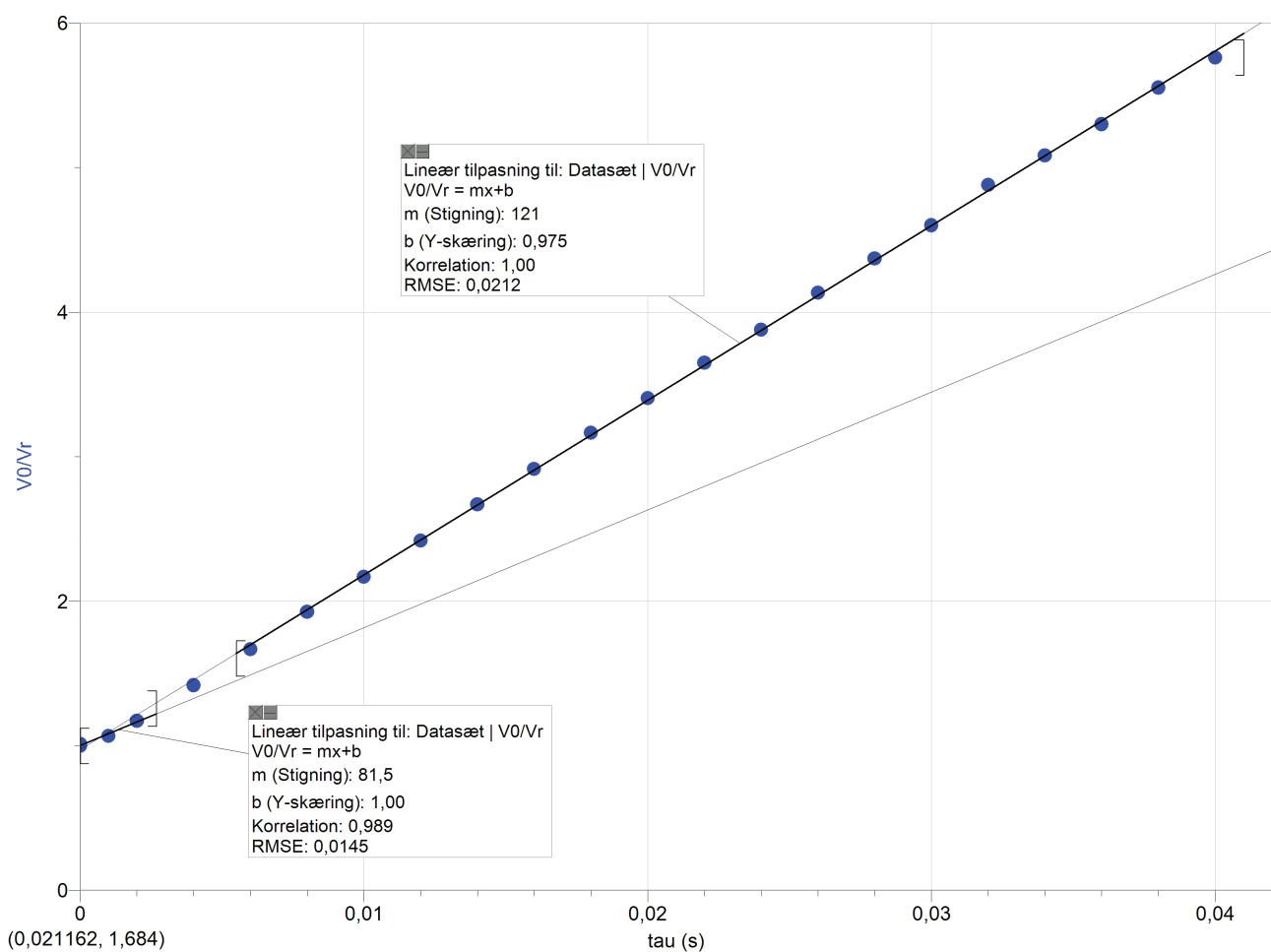
kan (11) endelig skrives

$$\frac{V_0}{V_r} = 1 + \frac{\omega}{\gamma + 1} \tau \quad (13)$$



Figur 11

Graf over  $\gamma$  som funktion af tidskonstanten  $\tau$ . Det ser ud til, at  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \gamma = e$  og  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \gamma = \frac{\pi}{2}$ . Disse grænseværdier udledes i Boks 3 og 2.



Figur 12

Måledata for  $V_0/V_r$  i intervallet  $0 \leq \tau \leq 0,04$  s. Hældningen i starten ( $\tau \lesssim 0,003$  s) er omkring  $81,5 \text{ s}^{-1}$ . Senere er hældningen meget stabil omkring  $121 \text{ s}^{-1}$ . Begge værdier er tæt på de teoretisk forudsagte.

Udtrykket (13) ville have været helt lineært i  $\tau$ , hvis  $\gamma$  havde været helt konstant – men  $\gamma$  er en funktion af  $\tau$ , se figur 11. I Boks 3 og Boks 4 viser vi, at  $\gamma \rightarrow \frac{\pi}{2}$  for  $\tau \rightarrow \infty$  og  $\gamma \rightarrow e$  for  $\tau \rightarrow 0$ , og dermed vokser koefficienten foran  $\tau$  fra  $\frac{100\pi}{e+1} = 84,5 \text{ s}^{-1}$  og  $\frac{100\pi}{\frac{\pi}{2}+1} = 122 \text{ s}^{-1}$ .

### Konklusion

Formel (13) viser, at grafen for den reciprokke ripple-spænding  $V_0/V_r$  forventes at være tæt på en ret linje med hældningskoefficient  $84,5 \text{ s}^{-1}$  når  $\tau$  er tæt på 0, og  $122 \text{ s}^{-1}$  når  $\tau$  er stor. Dette er i overordentlig fin overensstemmelse med målingerne, se figur 12.

Til sidst bemærker vi, at vores model (13) – som lovet – umiddelbart kan oversættes til modellen (2) for ripple-spændingen, når  $\omega = 100 \pi$  og  $\tau$  ikke er alt for lille ( $\tau \gtrsim 0,005 \text{ s}$ ):

$$V_r = \frac{V_0}{1 + \frac{\omega\tau}{\pi/2 + 1}} = \frac{V_0}{1 + \frac{\pi}{\pi/2 + 1} \cdot 2fRC} \quad (2)$$

At teorien trods alt ikke stemmer 100 % overens med de observerede hældninger kan dels skyldes de lineariserende approksimationer omkring bestemmelsen af  $(t_3, V_3)$ , dels at vi – som nævnt i starten – ikke har taget højde for spændingstab over dioderne (figur 1 og 2).

### Noter

<sup>1)</sup> **IB** er *International Baccalaureate*, og *Extended Essay* er for IB, hvad SRP er for STX.

### Kilder

- [1] J. Millman & C.C Halkias: *Integrated electronics*, McGraw-Hill, 1972 (p. 112f)  
[2] J. Tashkovska: *Ripple voltage minimization using a capacitor*, Birkerød Gymnasium og IB, Extended Essay, 2024.

$\tau$	$V_0/V_r$	$V_0/V_r$	%-afvigelse	$V_0/V_r$
s	Data	Wegge & Tashkovska		Millman & Halkias
0,000	1,00	1,00	0,0	0,0
0,001	1,07	1,12	5,0	0,1
0,002	1,17	1,24	6,0	0,2
0,004	1,42	1,49	4,9	0,4
0,006	1,67	1,73	3,9	0,6
0,008	1,93	1,98	2,6	0,8
0,010	2,17	2,22	2,4	1,0
0,012	2,42	2,47	1,9	1,2
0,014	2,67	2,71	1,5	1,4
0,016	2,92	2,96	1,4	1,6
0,018	3,17	3,20	1,1	1,8
0,020	3,40	3,44	1,2	2,0
0,022	3,65	3,69	1,0	2,2
0,024	3,88	3,93	1,4	2,4
0,026	4,13	4,18	1,0	2,6
0,028	4,37	4,42	1,2	2,8
0,030	4,60	4,67	1,4	3,0
0,032	4,88	4,91	0,6	3,2
0,034	5,08	5,15	1,4	3,4
0,036	5,30	5,40	1,9	3,6
0,038	5,55	5,64	1,7	3,8
0,040	5,76	5,89	2,2	4,0

Tabel 1

Måledata sammenholdt med Milmann og Halkias' model (1) og med vores model (2).

### Boks 1 $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \beta = 1$

Parameteren  $\beta$  er defineret i (6).

Lad  $x = \frac{1}{\omega\tau}$ , så  $\frac{t_1}{\tau} = x \tan^{-1}(x)$ . Grænseovergangen  $\tau \rightarrow \infty$  svarer til  $x \rightarrow 0$ .

Med brug af (3) og lille-vinkel-approksimationen  $\tan^{-1}(x) \approx x$  fås

$$\beta = \frac{e^{\frac{t_1}{\tau}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}}} = \frac{e^{x \tan^{-1}(x)}}{\sqrt{1 + x^2}} \approx \frac{e^{x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} \rightarrow 1 \quad \text{for } x \rightarrow 0, \text{ QED.}$$

Bemærk også, at konvergens  $\beta - 1 \rightarrow 0$  er så hurtig, at  $\frac{1-\beta}{x} \rightarrow 0$  for  $x \rightarrow 0$ .



**Boks 2**  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \gamma = \frac{\pi}{2}$

Parameteren  $\gamma$  er defineret i (12).

Lad  $x = \frac{1}{\omega\tau}$  og Taylor-udvikl  $e^{\frac{t_2}{\tau}} = e^{\frac{\pi x}{2}}$  omkring  $x = 0$ :

$$e^{\frac{\pi x}{2}} = 1 + \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi x}{2} \right)^2 + \dots$$

Ved indsætning heraf i definitionen (12) fås

$$\gamma = \omega\tau \left( \frac{1}{\beta} e^{\frac{t_2}{\tau}} - 1 \right) = \frac{1}{\beta x} \left( e^{\frac{\pi x}{2}} - \beta \right) = \frac{1}{\beta x} \left( 1 - \beta + \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi x}{2} \right)^2 + \dots \right) = \frac{1}{\beta} \left( \frac{1 - \beta}{x} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8} x + \dots \right)$$

Fra Boks 1 ved vi, at  $\lim_{x \rightarrow 0} \beta = 1$  og  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \beta}{x} = 0$ , og derfor følger det at  $\lim_{x \rightarrow 0} \gamma = \frac{\pi}{2}$ , QED.

**Boks 3**  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \gamma = e$

Bemærk først, at  $t_1 = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\omega\tau} \right) \rightarrow \frac{\pi}{2\omega} = t_2$ , når  $\tau \rightarrow 0$ , så både tæller og nævner i brøken  $\frac{t_2 - t_1}{\tau}$  går mod 0 når  $\tau \rightarrow 0$ .

Grænseværdien af den ubehagelige brøk findes med l'Hôspitals regel:

$$\frac{d}{d\tau} (t_2 - t_1) = -\frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\omega\tau} \right) \right) = \dots = \frac{1}{(\omega\tau)^2 + 1}$$

og derfor er  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{t_2 - t_1}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(\omega\tau)^2 + 1}}{1} = 1$

Da  $\gamma = \omega\tau \left( \frac{1}{\beta} e^{\frac{t_2}{\tau}} - 1 \right) = \omega\tau \left( \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}}}{e^{\frac{t_1}{\tau}}} e^{\frac{t_2}{\tau}} - 1 \right) = \dots = \sqrt{(\omega\tau)^2 + 1} \cdot e^{\frac{t_2 - t_1}{\tau}} - \omega\tau$ , ser vi nu, at  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \gamma = e$ , QED.