Rumrejser med 1g acceleration

JÁN BEŇAČKA, Constatine the Philosopher University Nitra
OVERSAT AF JOHN ANDERSEN, VIAUC Læreruddannelsen i Aarhus

1 Introduktion

Denne artikel er, selvom dens indhold er taget fra fysikkens verden, skrevet som en del af af et europæisk udviklingsarbejde inden for matematikundervisning kaldet *Math2Earth*. Projektet var et treårigt Comeniusprojekt (2007 – 2010) med deltagelse af Italien, Østrig, Bulgarien, Slovakiet og Danmark. Målet med projektet var på baggrund af en mindre undersøgelse i deltagerlandene om elevernes interesser at vise, hvordan matematik kommer i spil i forskellige reelle problemstillinger af interesse hos eleverne. På projektets hjemmeside math2earth.org kan man finde en lang række andre artikler, hvoraf enkelte er oversat til dansk, og resten er på engelsk.

1.1 Problemstilling

Inden for en overskuelig fremtid vil civilisationer som vores være nødt til at fremskaffe råmaterialer fra det ydre rum, hvis det nuværende forbrug skal opretholdes. Scenariet er dette: En raket accelererer et rumskib op til en passende marchhastighed, raketten slukkes og mandskabet vil befinde sig i vægtløs tilstand indtil de er fremme ved målet og der bremses ned til en passende landingshastighed.

På en sådan rejse vil man være længe undervejs. Jorden – Mars retur anslås at vare 520 dage [1]. En så lang periode levet i vægtløshed vil være ødelæggende for mandskabets helbred. Men man må jo kunne undgå vægtløsheden ved at lade rejsen foregå med acceleration hhv. deceleration på fx 1 g hvorved man simulerer Jordens tyngdefelt. I dette afsnit undersøges sådanne rejser til hhv. Månen, Mars og Pluto. Spørgsmål i fokus er: Hvor lang tid vil en sådan rejse vare, og hvor store hastigheder kommer vi op på? De kan besvares med stof på folkeskoleniveau og denne del af undersøgelsen antyder, at udnyttelsen af planeterne kan begynde snart.

Men vi skal også se på rumfartøjet: Hvad skal motoren kunne præstere? Hvad er energiforbruget? Kan det overhovedet lade sig gøre at foretage sådanne rejser? Derfor beregner vi udstødningshastighed og energibehov. Det er en problemstilling, der behandles i teorien for bevægelse af legemer med varierende masser og kræver infinitesimalregning. Denne del af emnet er rettet mod studerende med interesse for raketvidenskab og rumteknologi og med grundlæggende viden om integral– og differentialregning på gymnasieniveau.

2 Pensumpunkter dækket af dette afsnit

2.1 Matematikpensum

- Manipulation af symbolholdige udtryk indeholdende brøker og eksponenter
- Differential– og integralregning
- Løsning af simple differentialligninger

2.2 Fysikpensum

- Bevægelse med konstant acceleration
- Mekanisk arbejde
- Omsætning mellem forskellige energiformer

3 Undersøgelse af problemstillingerne

3.1 Rejsens varighed og den maksimale hastighed

Vi antager at vores rumskib bevæger sig ad en ret linje. Det starter med hastighed 0 og accelererer 1g på den første halvdel af rejsen. Derpå slukkes motoren, den drejes 180° (det gøres så hurtigt som muligt, og vi ser bort fra den tid, der går med det) og tændes igen, så der nu bremses med en deceleration på 1g. Kald hele rejsens varighed t_T og den tilbagelagte distance d_T. Accelerationsperioden varer dermed $t_T/2$ og i løbet af denne periode kommer vi op på hastigheden v_T, medens der er tilbagelagt distancen $d_T/2$ givet ved

$$v_T = g\frac{t_T}{2},\ \frac{d_T}{2} = \frac{1}{2}g\left(\frac{t_T}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

Decelerationsperioden er af samme længde, og der tilbagelægges den samme distance, så den samlede rejses længde er

$$d_T = \frac{1}{2}g\left(\frac{t_T}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}g\left(\frac{t_T}{2}\right)^2 = \frac{gt_T{}^2}{4} \qquad (2)$$

Heraf fås

$$t_T = 2\sqrt{\frac{d_T}{g}} \qquad (3)$$

og følgelig er

$$v_T = \sqrt{gd_T} \qquad (4)$$

Vi finder, at

$t_T \approx$ 3,5 timer, $v_T \approx$ 61 km/s
ved en Jord – Måne afstand på $3{,}8\cdot 10^5$ km [2]
$t_T \approx$ 2 dage, $v_T \approx$ 858 km/s
ved en Jord – Mars afstand på $7{,}5\cdot 10^7$ km [3] og
$t_T \approx$ 18 dage, $v_T \approx$ 7542 km/s
ved en Jord – Pluto afstand på $5{,}8\cdot 10^9$ km [4]

Værdierne af t_T virker interessante for de antyder at en udnyttelse af planeternes ressourcer ligger lige om hjørnet. Imidlertid ved vi endnu intet om rumskibet – hvilke krav skal motoren kunne honorere og hvor meget brændstof skal bruges?

3.2 Tsiolkovskys raketligning

Trykkraften, der leveres af udstødningen fra en ideel raketmotor, er givet ved ligningen [5]

$$F = v_v m_s \qquad (5)$$

Fysik

hvor m_s er den mængde raketbrændstof, der forbrændes per sekund og udstødes af dyserne som varm luft og v_v er udstødningshastigheden, dvs. den relative hastighed af gassen i forhold til rumskibet. Antag at v_v er konstant og m_s er en funktion af tiden. Lad M betegne rumskibets masse til tid $t = 0$. Massen m til tid t er da givet ved

$$m = M - \int_0^t m_s(z)\,dz \tag{6}$$

Newtons lov giver nu, idet accelerationen er $1g$

$$\nu_v m_s = g\left(M - \int_0^t m_s(z)\,dz\right) \tag{7}$$

Differentieres med hensyn til tiden fås

$$\nu_v \frac{dm_s}{dt} = -g\,m_s \tag{8}$$

Separation af de variable med efterfølgende integration giver

$$m_s = Ce^{-\frac{g}{\nu_v}t} \tag{9}$$

hvor C er en konstant. Lad udstødningsraten være M_s til $t = 0$. Så er $C = M_s$ og

$$m_s = M_s e^{-\frac{g}{\nu_v}t} \tag{10}$$

Hvis $t = 0$ giver ligning (5)

$$g\,M = \nu_v M_s \tag{11}$$

hvoraf man får

$$M_s = \frac{g\,M}{\nu_v} \tag{12}$$

og dermed

$$m_s = \frac{g\,M}{\nu_v} e^{-\frac{g}{\nu_v}t} \tag{13}$$

Forbrændingstiden er t_T, så den samlede brændstofmængde er

$$\begin{aligned} m_f &= \int_0^{t_T} m_s\,dt = \frac{gM}{\nu_v}\int_0^{t_T} e^{-\frac{g}{\nu_v}t}\,dt \\ &= -M\left[e^{-\frac{g}{\nu_v}t}\right]_0^{t_T} = M\left(1 - e^{-\frac{g}{\nu_v}t_T}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

Den relative masse af brændstoffet ved start er

$$m_{fr} = \frac{m_f}{M} = 1 - e^{-\frac{g}{\nu_v}t_T} \tag{15}$$

hvoraf man får

$$t_T = -\frac{\nu_v}{g} ln(1 - m_{fr}) \tag{16}$$

Da $0 < (1 - m_{fr}) < 1$ er $\ln(1 - m_{fr}) < 0$ og dermed $t_T > 0$. Hvis rumskibet accelererer hele tiden op til t_T vil slutfarten være

$$v_T = g\,t_T = -v_v\,ln(1 - m_{fr}) \tag{17}$$

Omskrivning af ligning (17) og indsættelse M_0 for massen af rumskibet uden brændstof giver den fundamentale raketligning kendt som Tsiolkovsky ligningen [6]

$$\begin{aligned} \nu_T &= -\nu_v\,ln(1 - m_{fr}) = -\nu_v\,ln\left(1 - \frac{m_f}{M}\right) = -\nu_v\,ln\left(\frac{M - m_f}{M}\right) \\ &= -\nu_v\,ln\left(\frac{M_0}{M}\right) = \nu_v\,ln\left(\frac{M}{M_0}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

3.3 Minimal udstødningshastighed for raketmotoren

Rumskibet i vores model accelererer i perioden $t_T/2$ og når en maksimum fart på (se ligning (1))

$$\nu_T = g\frac{t_T}{2} = -\frac{\nu_v}{2} ln(1 - m_{fr}) \tag{19}$$

Så decelererer rumskibet. Den samlede distance, som motoren arbejder i er (se ligning (2))

$$d_T = \frac{g t_T^{\,2}}{4} = \frac{\nu_v^{\,2}}{4g} ln^2(1 - m_{fr}) \tag{20}$$

Derfor er

$$\nu_v = -2\frac{\sqrt{g d_T}}{ln(1 - m_{fr})} \tag{21}$$

Minimal udstødningsfart ved forskellige relative brændstofmasser ses i Tabel 1

	Jord–Måne	Jord–Mars	Jord–Pluto
m_{fr} (%)		v_v (km/s)	
99	27	370	3.300
90	53	750	6.600
50	180	2.500	22.000

Tabel 1 Minimal udstødningshastighed for raketmotor

Eksisterende raketmotorer har maksimum $v_v \approx 4{,}4$ km/s [7]. Ved $m_{fr} = 90$ % giver ligningerne (16, 19, 20) $t_T = 1000$ s, $v_T \approx 5$ km/s, $d_T \approx 2700$ km. Det er en alt for kort distance til at muliggøre rumrejser af den type, der er omtalt ovenfor. Det vil sige, at $1g$ rumrejser er noget, der hører til i en fremtid, hvor ny raketteknologi er udviklet [8,9].

3.4 Raketmotorens energiforbrug

Det arbejde, der udføres af motoren under forbrændingen i tiden t_T, er

$$W = \int_0^s \mathbf{F}d\mathbf{s} = \int_0^{t_T} \mathbf{F}\mathbf{v}dt = \int_0^{t_T} Fvdt \qquad (22)$$

Udstødningen fra motoren er givet ved ligningerne (5, 13) og rumskibets fart er $v = g\,t$, hvoraf

$$W = g^2 M \int_0^{t_T} t e^{-\frac{g}{\nu_v}t} dt = M\nu_v{}^2 \left[1 - \left(1 + \frac{g t_T}{\nu_v}\right) e^{-\frac{g t_T}{\nu_v}}\right] \qquad (23)$$

Den totale masse m_f af brændstoffet er givet ved ligning (14). Den nødvendige energi for en masseenhed af brændstof, dvs. brændstofenergidensiteten er dermed

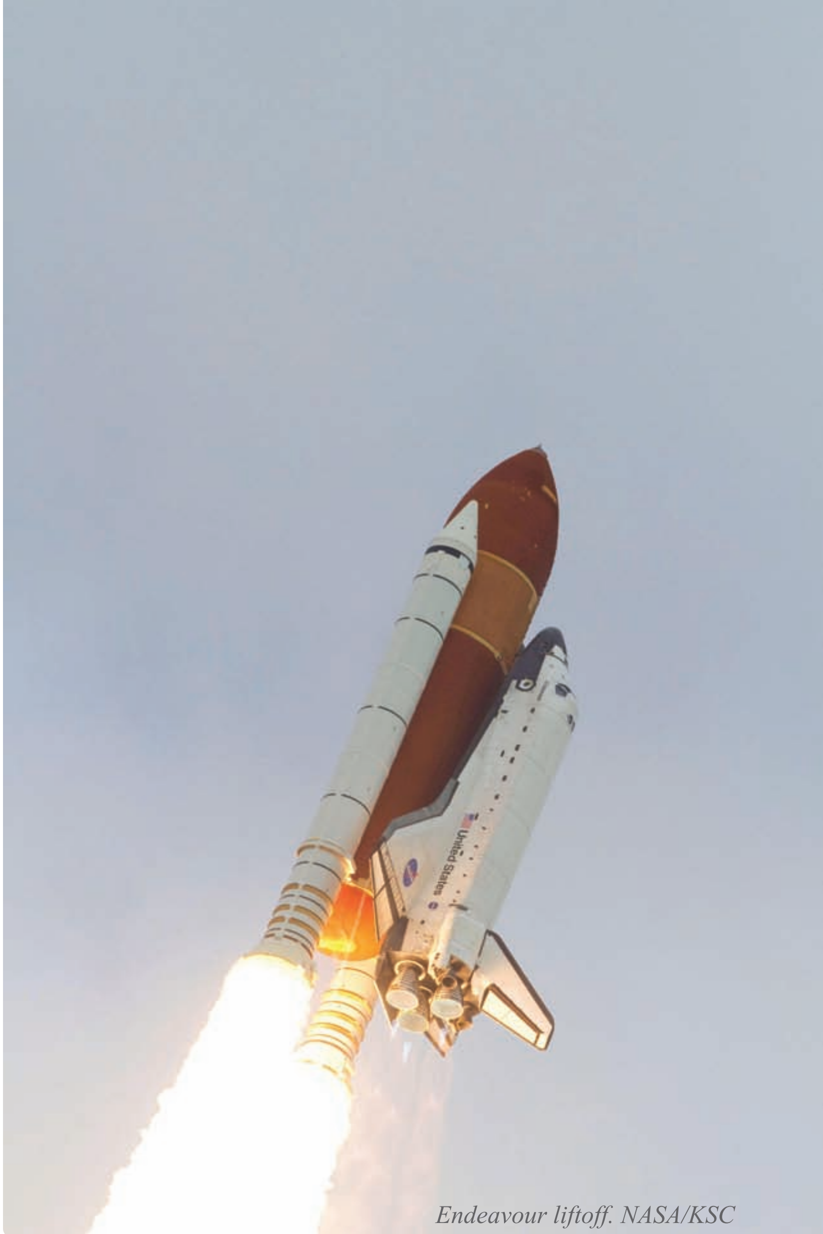
$$W_{fu} = \frac{W}{m_f} = \nu_v{}^2 \frac{1 - \left(1 + \frac{g t_T}{\nu_v}\right) e^{-\frac{g t_T}{\nu_v}}}{1 - e^{-\frac{g t_T}{\nu_v}}}$$

$$= 4 g d_T \frac{m_{fr} + \left(1 - m_{fr}\right) ln(1 - m_{fr})}{m_{fr}\, ln^2(1 - m_{fr})} \qquad (24)$$

Brændstoffets minimale energitæthed ved forskellige relative brændstofmasser fremgår af Tabel 2

	Jord–Måne	Jord–Mars	Jord–Pluto
m_{fr} (%)		W_{fu} (J/kg)	
99	$6{,}7 \cdot 10^8$	$1{,}3 \cdot 10^{11}$	$1{,}0 \cdot 10^{13}$
90	$2{,}1 \cdot 10^9$	$4{,}1 \cdot 10^{11}$	$3{,}2 \cdot 10^{13}$
50	$9{,}5 \cdot 10^9$	$1{,}9 \cdot 10^{12}$	$1{,}5 \cdot 10^{14}$

Tabel 2 Brændstoffets minimale energitæthed



Endeavour liftoff. NASA/KSC

Benzin har den største energitæthed af alle fossile drivmidler med en værdi på $W_{fu} \approx 4{,}7 \cdot 10^7$ J/kg [10]. Flydende brint har den maksimale værdi af alle flydende drivmidler med værdien $W_{fu} \approx 1{,}4 \cdot 10^8$ J/kg. Energitætheden for fissionsdrivmiddel som U–235 er $W_{fu} \approx 7{,}7 \cdot 10^{13}$ J/kg. Energitætheden af brint som fusionært drivmiddel er $W_{fu} \approx 3{,}0 \cdot 10^{14}$ J/kg.

Vi ser at kun fissions– og fusionsmaskiner kan muliggøre rejserne. Slutningsvis giver formlen $E = mc^2$ $W_{fu} \approx 9 \cdot 10^{16}$ J/kg. Ligning (24) giver dermed $m_{fr} \approx 0{,}13$ % ved Jord–Pluto afstand hvilket fx svarer til en relativ masse på cirka 2 liter benzin til en bil.

3.5 Konklusioner

Forudsætninger for at tilbagelægge Jord – Måne, Jord – Mars og Jord – Pluto rejser ved 1 g acceleration (halvdelen af turen med 1 g og anden halvdel af turen med $-1g$) hvis brændstoffet udgør 50 % af rumskibets begyndelsesmasse er:

1. raketmotoren udstøder med farten 180 km/s, 2500 km/s hhv. 22.500 km/s
2. brændstofenergitæthed 10 GJ/kg, 2 TJ/kg hhv. 150 TJ/kg, som kun kan opnås ved fissions– eller fusionsprocesser.

Referencer

[1] imbp.ru/Mars500/Mars500-e.html

[2] *Moon*. In Wikipedia, The Free Encyclopedia, en.wikipedia.org/w/index.php?title=Moon&oldid=141805733

[3] *Mars*. In Wikipedia, The Free Encyclopedia, en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mars&oldid=141969984

[4] *Pluto*. In Wikipedia, The Free Encyclopedia, en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pluto&oldid=141528650

[5] grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/rockth.html

[6] *Tsiolkovsky rocket equation*. In Wikipedia, The Free Encyclopedia, en.wikipedia.org/w/index.php?title=Tsiolkovsky_rocket_equation&oldid=140956051

[7] *Space Shuttle main engine*. In Wikipedia, The Free Encyclopedia, en.wikipedia.org/w/index.php?title=Space_Shuttle_main_engine&oldid=141241061

[8] grc.nasa.gov/WWW/ion/overview/overview.htm

[9] *Rocket engine*. In Wikipedia, The Free Encyclopedia, en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rocket_engine&oldid=141073495

[10] *Energy density*. In Wikipedia,The Free Encyclopedia, en.wikipedia.org/wiki/Energy_density