

Poyntings sætning, overfladeladninger og transient

GUNNAR GUNNARSSON, gg@kvuc.dk

Artiklen er et tillæg til artiklen *Elektriske felter og overfladeladning* bragt i LMFK-bladet nr. 1, 2021¹⁾. I den nævnte artikel (artikel 1) har jeg gennemgået den rolle overfladeladninger spiller i strømførende kredsløb. Fordelingen af overfladeladningerne forklarer både hvordan strøm løber og hvordan spændingsfald opstår de rigtige steder i kredsløbet. Men desuden sørger overfladeladningerne for, at der dannes elektriske felter i rummet omkring kredsløbet. Disse vil sammen med magnetfelterne, via *Poyntingvektoren*

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

sørge for, at energien kommer fra en spændingskilde til kredsløbets komponenter. I artiklen vil jeg komme nærmere ind på, hvor Poyntingvektoren stammer fra, og vise hvordan den såkaldte Poyntings sætning knytter sig til energiomsætningen i et kredsløb med stationære strømme. I afsnit 2 vil jeg komme ind på hvordan transienten, når et kredsløb tændes, fører til den rigtige fordeling af overfladeladninger i forskellige kredsløb. I afsnit 3 præsenteres en helt anden konsekvens af overfladeladningerne, nemlig at to strømførende ledere vil påvirke hinanden med en elektrisk kraft, hvor vi sammenligner denne med den magnetiske kraft mellem lederne.

1. Poyntings sætning

Vi tager udgangspunkt i Amperes og Faradays love:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

hvor \vec{J} er strømtætheden.

Ved at prikke den første ligning med \vec{E} , den sidste med \vec{B} , trække dem fra hinanden, og udnytte en velkendt ligning for vektorfelter²⁾, fås

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \cdot \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \cdot \vec{B}^2 \right) = \frac{1}{\mu_0} \cdot \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \cdot \vec{J}$$

Parentesen på venstre side genkendes som energitætheden i det elektromagnetiske felt, som vi betegner med u , og $1/\mu_0 \cdot \vec{E} \times \vec{B}$ kalder vi Poyntingvektoren, og betegner den med \vec{S} . Vi ender derfor med den ligning som kaldes Poyntings sætning:

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{J}$$

Sætningen kan betragtes som en kontinuitetsligning for det elektromagnetiske felt, og fortæller hvordan energibevarelsen manifesterer sig lokalt. Det kan være en fordel at se på integralversionen af sætningen:

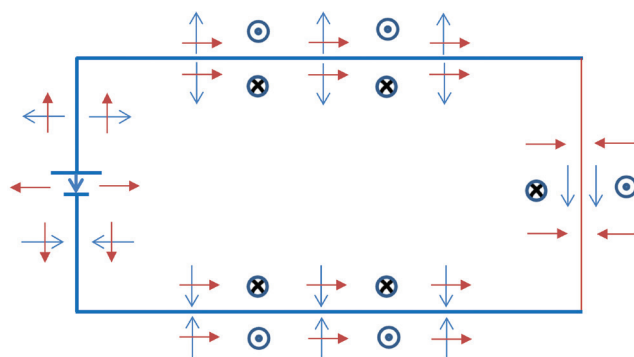
$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \int_V \nabla \cdot \vec{S} dV + \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \oint_S \vec{S} \cdot \vec{n} dA + \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV$$

hvor U er den elektromagnetiske energi i et volumen V , afgrænset af fladen S . Venstre side fortæller om den effekt hvor med den elektromagnetiske energi ændrer sig i volumenet, og højre side fortæller om hvordan det sker; nemlig ved, at energi strømmer ind eller ud af volumenet og/eller ved dissipation i et medium. Det er af denne sammenhæng, fortolkningen af Poyntingvektoren som effektstrømtæthed stammer.

1.1 Et simpelt kredsløb med en resistor

Lige som i artikel 1, benytter vi os af et kredsløb med en aflang cylindrisk resistor, og kobberledninger med forsvindende lille resistans. Figur 1 illustrerer kredsløbet, samt i grove træk de magnetiske felter, elektriske felter (blå pile) og Poyntingvektoren (røde pile), i stationær tilstand. Detaljerne i de tre vektorfelter er behandlet i artikel 1.



Figur 1

E-feltet, B-feltet og Poyntingvektoren ved kredsløbet.

I en stationær tilstand er $\partial u / \partial t = 0$. Dermed må $-\nabla \cdot \vec{S}$ stemme overens med $\vec{E} \cdot \vec{J}$. Vi vil vise at det er tilfældet både i rummet omkring kredsløbet og i ledningerne såvel som i resistoren.

Vi betragter først kobberledningerne. Der er $\vec{E} = \vec{0}$ og dermed er $\vec{S} = \vec{0}$. Altså er Poyntings sætning trivielt opfyldt. Der foregår hverken energitransport eller energiomsætning i ledningerne.

Lad os dernæst kigge på situationen lige udenfor resistoren. Da der ikke er nogen elektrisk strøm, er $\vec{E} \cdot \vec{J} = 0$. Af de elektriske og magnetiske felters orientering fremgår det, at Poyntingvektoren har retning stort set vinkelret på og ind imod resistoren. Her er størrelsen af felterne givet ved $E = U/l$, hvor

l er resistorens længde, $B = \mu_0 \cdot I / (2\pi r)$, og Poyntingvektoren har derfor størrelsen $S = U \cdot I / (2\pi r \cdot l)$. I cylindriske koordinater kan \vec{S} derfor udtrykkes som

$$\vec{S} = -\frac{U \cdot I}{2\pi r \cdot l} \cdot \vec{e}_r$$

hvor \vec{e}_r er en enhedsvektor med retning radialt ud fra resistoren. Da er

$$\nabla \cdot \vec{S} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot S_r) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U \cdot I}{2\pi \cdot l} \right)$$

som heldigvis giver 0. Begge led er således 0, der er ingen energisætning og den elektromagnetiske energi som strømmer ind i et volumen, er lig med den der strømmer ud af volumenet. Yderligere ses, at effektstrømtætheden ind i resistoren passer netop med den i resistoren omsatte effekt, som behandlet i artikel 1.

Situationen uden for kobberledningerne er lignende. Her har vi en Poyntingvektor, der kan udtrykkes som

$$\vec{S} = S(r) \cdot \vec{e}_z$$

hvor z er koordinaten parallelt med ledningen. Da \vec{S} kun afhænger af den radiale koordinat r , men har retning parallelt med z -aksen, er $\nabla \cdot \vec{S} = 0$, så igen er der ingen energisætning uden for kredsløbet, og den energi der kommer ind i et volumen, går ud igen.

Til sidst kigger vi på situationen inde i resistoren. Her er $E = U/l$, mens magnetfeltet i afstanden r fra centralaksen nu er $B = \mu_0 \cdot I \cdot r / (2\pi a^2)$, hvor a er resistorens radius.

Poyntingvektoren er derfor

$$\vec{S} = -\frac{U \cdot I}{2\pi a^2 \cdot l} \cdot r \cdot \vec{e}_r$$

Nu er divergensen ikke længere nul:

$$\nabla \cdot \vec{S} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot S_r) = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U \cdot I}{2\pi a^2 \cdot l} \cdot r^2 \right) = -\frac{U \cdot I}{\pi a^2 \cdot l}$$

Integreres denne over resistorens volumen fås

$$\int_V \nabla \cdot \vec{S} dV = -U \cdot I$$

Dette stemmer overens med dissimationsleddet, idet \vec{E} og \vec{J} er konstante, og ensrettede og parallelle med resistoraksen:

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV = \pi a^2 \cdot l \cdot \frac{U}{l} \cdot \frac{I}{\pi a^2} = U \cdot I$$

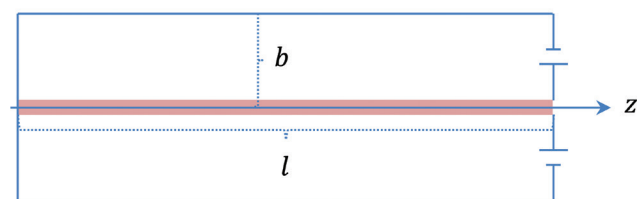
$\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV$ kan også udtrykkes mere direkte ved feltkraftens arbejde ved at flytte ladningen ΔQ stykket Δx igennem feltet:

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV = E \cdot I \cdot \Delta x = \frac{F_{el}}{\Delta Q} \cdot I \cdot \Delta x = F_{el} \cdot v$$

hvilket netop er den effekt hvormed arbejdet udføres. Så alt er som det skal være: energien til at udføre arbejdet høster det interne E -felt via Poyntings sætning, fra felterne uden for komponenten. Ingen energi strømmer igennem kobberledningerne. Tværtimod, strømmer energien langs med kredsløbet i begge retninger fra batteriet. Det harmonerer dårligt med den gængse beskrivelse af en potentialenergi som elektronerne skulle aflevere i komponenten (på trods af at elektronerne evt. aldrig har været igennem spændingskilden). Problemet med den beskrivelse ligger i antagelsen af, at potentialenergien, er "ejet af" elektronerne. Vi er vandt til at snakke om at partikler besidder potential energi, mens det er mere fysisk korrekt at tilskrive potentialenergien felterne. Denne feltenergi kan defineres uden at (eksterne) partikler er involverede. Selvom det ikke er særlig fremtrædende i litteraturen, er flere prominente fysikere inde på denne pointe, bl.a. Jackson³⁾, Rindler⁴⁾ og Weyl⁵⁾. På samme måde kan vi behandle situationen med en enkelt ladet partikel i det homogene felt mellem kapacitorplader. Når ladningen accelereres fra den ene plade til den anden, er det ikke partiklen der taber potentialenergi, men kapacitorfeltet, da der i slutttilstanden er mindre ladning på pladerne og dermed mindre feltenergi.

1.2 Coaxkabel

For en ordens skyld, viser vi også, at Poyntings sætning giver en logisk sammenhængende beskrivelse af energisætningen i et coaxkabel. I artikel 1 betragtede vi et langt coaxkabel, hvor det indre kabel har radius a og resistans R , og det ydre kabel er en tynd skal med radius b , men har resistansen nul. Længden af kablet er $l \gg b$. Det indre kabel ligger langs z -aksen mellem $z = 0$ og $z = l$. Ved $z = l$ er der et cylinderfor-



Figur 2
Tværsnit af coaxkablet.

met batteri der forbinder det indre og det ydre kabel således, at potentialet er $\varphi = 0$ på det ydre kabel og $\varphi = U$ på det indre kabel. I den anden ende ($z = 0$) er det indre og ydre kabel forbundet så her er $\varphi = 0$. Der går en strøm I igennem systemet.

Det viste sig at Poyntingvektoren uden for kablet er nulvektoren, mens den for $a < r < b$ er givet ved

$$\begin{aligned}\vec{S}(r, z) &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \\ &= -\frac{U}{l} \cdot \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)} \cdot \frac{I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_r - \frac{U}{l} \cdot \frac{z}{r} \cdot \frac{1}{\ln(b/a)} \cdot \frac{I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_z\end{aligned}$$

I stationær tilstand er som før $\partial u / \partial t = 0$. Da der ikke er nogen strøm mellem kablet, gælder også at $\vec{E} \cdot \vec{J} = 0$. Dermed må $\nabla \cdot \vec{S}$ også være nul. Det tjekker vi lige:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{S} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot S_r) + \frac{\partial S_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{U}{l} \cdot \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\ln(r)}{\ln(b/a)} \right) - \frac{U}{l} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\ln(b/a)} \cdot \frac{I}{2\pi r} \\ &= \frac{U}{l} \cdot \frac{I}{2\pi r^2} \cdot \frac{1}{\ln(b/a)} - \frac{U}{l} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\ln(b/a)} \cdot \frac{I}{2\pi r^2} = 0\end{aligned}$$

Inde i kablet har vi den samme situation som for kanthaltråden i forrige eksempel, og $\int_V \nabla \cdot \vec{S} dV$ vil netop svare til effekten af E -feltets udførte arbejde.

2 Transienten i starten og stationær tilstand

Når vi tænder for et kredsløb, vil der i en meget kort periode opstå en omfordeling af de overfladeladninger der strømmer ud i kredsløbet. I denne periode er $\partial u / \partial t \neq 0$ og dermed er også $\nabla \cdot \vec{S} \neq 0$ i området omkring kredsløbet. Det er ikke svært at benytte Poyntings sætning til at udføre beregninger fx for energien under opladning af en kapacitor⁶⁾, eller for oplagring af magnetisk energi i en solenoide. I de tilfælde kan man vise, at $\nabla \cdot \vec{S} = -\partial u / \partial t$. Af flere grunde er det dog væsentligt sværere at behandle et resistorkredsløb. I selv simple geometrier bliver E -felterne meget komplicerede inden den stationære tilstand opnås. Desuden vil der være energiomsætning så snart ladninger begynder at røre på sig, dvs. $\vec{E} \cdot \vec{J} \neq 0$. Vi vil derfor nøjes med nogle kvalitative betragtninger.

Lad os begynde med et kredsløb bestående af én resistor. Her betragter vi et kredsløb med fx kobberledninger, og med en meget tynd kobbertråd som resistor. Den eneste forskel på resistoren og ledningerne er således diameteren af tråden. Når kredsløbet tændes, strømmer ladninger ud i ledningerne. Det får elektrongassen til at udvide sig på den negative side og trække sig sammen på den positive side, som resulterer i dannelsen af overfladeladninger.

I ledningens tværsnit lige før indsnævringen på den negative side, vil flere elektroner pr. tidsenhed passere, end der gør inde i resistoren. Det vil føre til en lokal ophobning af overfladeelektroner ved resistorens indgang. Det hæmmer strømmen i ledningerne, således at færre elektroner vil umiddelbart efter ”prøve at komme ind i resistoren”. Argumentet gælder naturligvis også ved udgangen af resistoren. Samtidig øges, pga. den større gradient i overfladeladninger, det elektriske felt i resistoren. Denne feedbackmekanisme, dvs. samspillet mellem mængden og gradienten i overfladeladningerne og strømmen, fortsætter indtil strømstyrken er konstant i hele kredsløbet. Ved den stationære tilstand (i et ”normalt” kredsløb) er der en meget lille gradient i ledningernes overfladeladning, mens den er væsentlig større i resistoren, svarende til at det elektriske felt og dermed også spændingsfaldet er meget større over resistoren end over ledningerne.

Vi kan også af følgende argumentation se, at det elektriske felt må være størst i resistoren: Strømstyrken i stationær tilstand hænger sammen med elektronernes gennemsnitlige drifthastighed v_d via strømligningen

$$I = n \cdot e \cdot v_d \cdot A$$

Da tværsnitsarealet er mindst i resistoren, mens elektrontætheden n er den samme i resistoren og ledningerne indebærer det, at den gennemsnitlige drifthastighed er størst i resistoren.

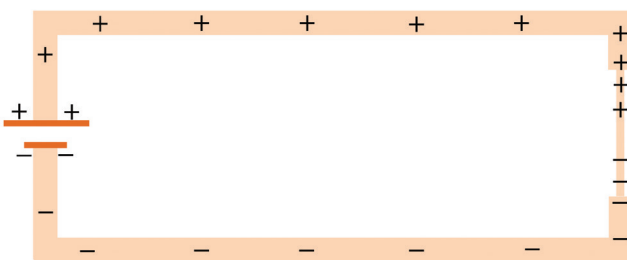
Men v_d er proportional med E , idet

$$v_d = \mu \cdot E$$

hvor μ er elektronmobiliteten, som udtrykt ved resistiviteten ρ er

$$\mu = \frac{1}{n \cdot e \cdot \rho}$$

μ er en materialekonstant, og derfor en konstant for kredsløbet. Dermed må det elektriske felt være størst i resistoren.

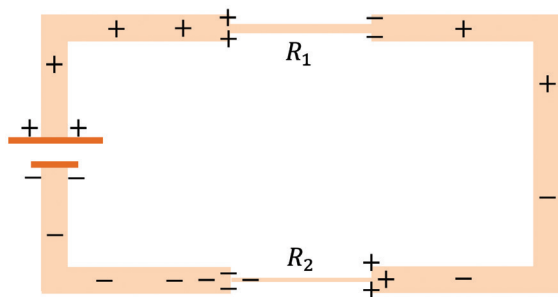


Figur 3

Illustration af den resulterende fordeling af overfladeladning.

Detaljerne i vejen mod stationær tilstand er interessante, og afhænger af begyndelsesbetingelserne. Man kan lege med numeriske simuleringer⁸⁾ af forskellig slags kredsløb, hvor flere parametre kan ændres, herunder resistansen, og ledningernes induktans. Simuleringerne er fremkommet ved numerisk løsning af Maxwells ligninger for transmissionslinjer. Det generelle billede er, at strømmen pga. feedbackmekanismerne udfører en dæmpet svingning, hvis tidskonstant afhænger af resistansen og induktansen, men er typisk under $1\mu\text{s}$.

Lad os nu kigge på en seriekobling, fx af to kobbertråde med samme længde men forskellige diametre.



Figur 4
Illustration af overfladeladning i serieforbindelse.

Hvis man går direkte til den stationære tilstand, kan det forekomme mystisk, at spændingen deles proportionalt med resistancerne. Især hvis man begynder at snakke om potentiel energi afleveret af elektronerne, i stedet for at inddrage felter og overfladeladninger, kan eleverne sidde med den underlige fornemmelse, at elektronerne ”instinktivt ved” hvor meget energi de skal aflevere i hver modstand.

Men overordnet set sker det samme som før. Når vi tænder for kredsløbet, opstår der trængsel ved resistorernes terminaler, hvilket resulterer i ophobning af overfladeladninger. Der ophobes mest ladning ved resistoren med den største resistans, så her bliver gradienten størst. Af strøm- og drifthastigheds-ligningen ses, at de resulterende elektriske felter i resistorerne ved stationær tilstand, vil have det modsatte forhold af tvær-snittsarealerne. Og dermed det samme forhold som resistancerne. Da modstandstrådene er lige lange, vil forholdet mellem spændingsfaldene være det samme som forholdet mellem de elektriske felter. Altså deles spændingen i proportion med resistorernes resistanser:

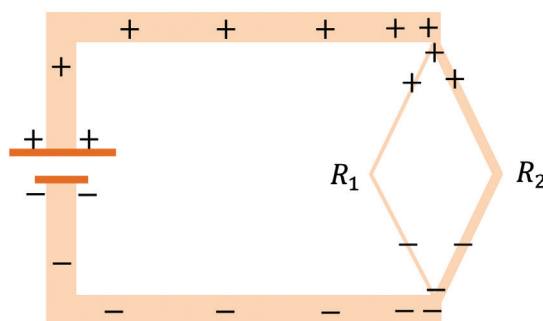
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Hvis nu resistorerne ikke var lige lange, og måske også var lavet af forskellige materialer, ville det elektriske felt og drifthastigheden ikke nødvendigvis være størst i den resistor der

har det mindste tvær-snittsareal, men spændingen ville stadigvæk deles på samme måde. Det følger ved at udnytte, at strømstyrken er konstant.

I seriekoblingen viser de nævnte simuleringer, at transienten er mere kompliceret end med en enkelt resistor⁹⁾. Bl.a. kan der opstå mange strømrefleksioner imellem resistorerne, og ved tre resistorer afhænger forløbet af resistorernes placering i kredsløbet.

Nu parallelforbinder vi de to kobbertråde. Vi tænder kredsløbet og en bølgefront af elektroner vil trænge ind i begge resistorer. Men som før vil strømmen ikke kunne fortsætte i samme takt som i ledningerne, og overfladeladninger ophobes ved resistorernes terminaler. I første omgang sådan at der er størst tæthed ved den modstand hvis resistans er størst. Denne gang vil feedbackmekanismerne under transienten sørge for, at ladingsforskellene mellem de to resistorer efterhånden udlignes. Det kan fx indses ved at vi forestiller os bøjede tråde forbundne til det samme punkt i kredsløbet, som på figuren.



Figur 5
Illustration af overfladeladninger ved parallelforbindelse.

I stationær tilstand vil der derfor være den samme overfladeladningsgradient igennem de to resistorer. Dermed er det elektriske felt det samme i resistorerne, og da de er lavet af samme materiale, må mobiliteten og dermed drifthastigheden også være den samme. Af strømligningen samt resistansen for en tråd følger, at

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

Hvis nu resistorerne ikke var lige lange, og eventuelt også var lavet af forskellige materialer, ville det elektriske felt være forskelligt i de to resistorer, og drifthastigheden ville normalt også være forskellig. Da får vi dog stadigvæk det samme:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{n_2 \cdot e \cdot \mu_2 \cdot E_2 \cdot A_2}{n_1 \cdot e \cdot \mu_1 \cdot E_1 \cdot A_1} = \frac{\rho_1 \cdot E_2 \cdot A_2}{\rho_2 \cdot E_1 \cdot A_1} = \frac{R_1 \cdot E_2 \cdot I_2}{R_2 \cdot E_1 \cdot I_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

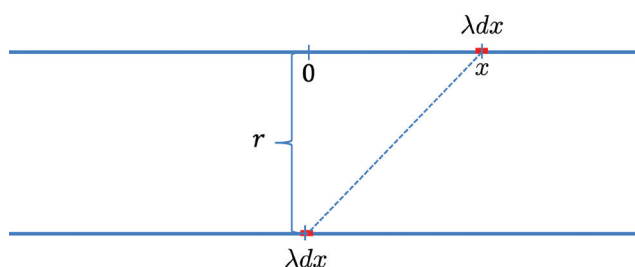
hvor vi ved lighedstegn nr. 2 har indsat sammenhængen mellem mobilitet og resistivitet, og det sidste lighedstegn bunder i, at det elektriske felt udfører det samme arbejde uanset vejen.

3 Den elektriske kraft mellem strømførende ledere

Det er velkendt, at der virker en magnetisk kraft mellem to strømførende ledere. Den kan være tiltrækkende eller frastødende, afhængigt af strømretningerne. Størrelsen af den magnetiske kraft pr. længde af to lige, parallelle uendelig lange ledere, adskilt af afstanden r , er

$$\frac{dF_{\text{mag}}}{dx} = \mu_0 \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{2\pi r}$$

Pga. overfladeladningerne vil der også virke en elektrisk kraft mellem ledningerne. I den betragtede situation med de to ledninger med strøm den ene vej og strøm den anden vej, har lederne numerisk set den samme ladningstæthed λ men med modsat fortegn, så kraften er tiltrækkende.



Vi forenkler situationen ved at betragte meget lange ledere, så de kan approksimeres med uendelig længde. Kraften mellem ladningerne λdx på de to ledere findes af Coulombs lov. Ved at integrere over den ene leder, findes kraften pr. længde på den anden leder. Af symmetrigrunde er det kun komponenten vinkelret på lederne der bidrager, og vi får

$$\frac{dF_{\text{el}}}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{x^2 + r^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}} \cdot dx = \frac{\lambda^2}{2\pi \epsilon_0 \cdot r}$$

Forholdet mellem den magnetiske og den elektriske kraft er da

$$\frac{dF_{\text{mag}}/dx}{dF_{\text{el}}/dx} = \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{I^2}{\lambda^2}$$

Da $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ bliver det

$$\frac{dF_{\text{mag}}/dx}{dF_{\text{el}}/dx} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{I^2}{\lambda^2}$$

I artikel 1 betragtede vi et kredsløb med to lange parallelle kobberledninger, med diameteren a , adskilt af en kanthaltråd

med længden r . Det viste sig, at ladningstætheden på kobberledningerne med god tilnærmelse afhang af spændingsfaldet over kanthaltråden via

$$\lambda = \frac{\pi \epsilon_0 U}{\ln(r/a)}$$

Med $U = 10$ V, $a = 0,5$ mm og $r = 1,0$ m, fås $\lambda \cong 3,7 \cdot 10^{-11}$ C/m. Hvis kanthaltråden har samme diameter som kobberledningerne, er resistansen $R = 2,0 \Omega$. Dermed er strømstyrken i kredsen $I = 5$ A. Da er

$$\frac{dF_{\text{mag}}/dx}{dF_{\text{el}}/dx} = \frac{1}{9 \cdot 10^{16}} \cdot \frac{5^2}{(3,7 \cdot 10^{-11})^2} = 2 \cdot 10^5$$

Under "normale" omstændigheder er den elektriske kraft således forsvindende lille i forhold til den magnetiske kraft. Muligvis kan den dog observeres ved tilstrækkelig høj spænding (som øger λ) og høj modstand (som mindsker I).

Noter

- 1) lmfk.dk/artikler/data/artikler/2101/2101_47.pdf
- 2) $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A}$
- 3) Se side 46 – 48 i J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, John Wiley & sons, 1975.
- 4) Se side 132 i Rindler, *Introduction to Special Relativity*, Pergamon, Oxford, 1982.
- 5) Se side 70 i Weyl, *Space – Time – Matter*, Dover, New York, 1952.
- 6) Se fx Elbeks bog: nbi.ku.dk/bibliotek/noter-og-undervisningsmateriale-i-fysik/elektromagnetisme
- 7) Hvis resistoren var af et andet stof end ledningerne, ville overfladeladningerne også sidde i grænselaget mellem de to stoffer som forklaret i artikel 1.
- 8) Se *Transition processes in linear systems* på siden: www1.astrophysik.uni-kiel.de/~hhaertel/index_e.htm
- 9) youtu.be/wB5HM5tYTgw