Udledningen af bølgeligningen og hastigheden af en snorbølge.

Vi ved, at vi kan beskrive en bølge i tid og sted ved en funktion af to variable.

$$f(x,t) = A \cdot \sin\,(k \cdot x + \omega \cdot t)$$

Hvor $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$ kaldes bølgetallet og $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ kaldes vinkelhastigheden.

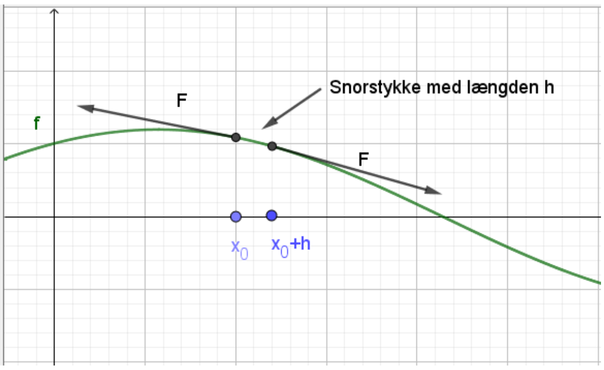
Vi vil nu benytte Newtons 2. lov til at udlede det, man kalder bølgeligningen og bagefter vise, at hastigheden af en snorbølge er givet ved:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Hvor F er den kraft, som snoren er spændt op med, og μ snorens masse pr længde. Altså $\mu = \frac{m_{snor}}{l_{snor}}$

Bølgeligningen.

Vi betragter et lille stykke af snoren, som svinger op og ned i en harmonisk svingning.

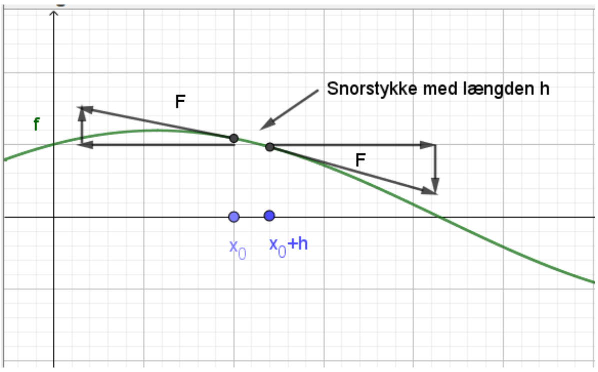


Figur 1

Da det er et lille stykke, og buen er ret flad, så er længden h af stykket den samme som afstanden på x-aksen.

Vi ser bort fra tyngdekraften, så det lille stykke bliver kun påvirket at snorspændingen F i begge ender, som det ses på figur 1. Disse kræfter vil virke langs tangenterne til grafen i de to punkter.

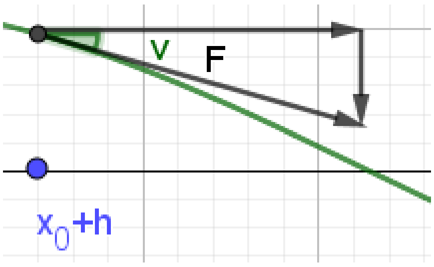
Vi opløser de to kræfter i vandrette og lodrette komposanter.



Figur 2

De vandrette komposanter går ud med hinanden, da vi antager, at der ikke er forskydninger til siden.

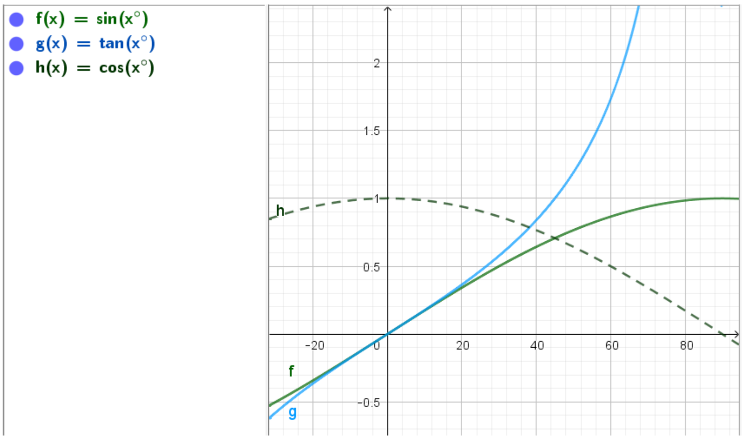
Den resulterende kraft på stykket kommer altså fra de lodrette komposanter. Vi ser nærmere på den ene ende af snorstykket. Enden er placeret i punktet $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.



Figur 3

Vektorerne danner en retvinklet trekant, så størrelsen af den lodrette kraft er $F \cdot \sin(v)$. Hvor v er retningsvinklen for vektoren.

Som det ses af figur 4, så gælder der for små vinkler, at $\tan(v) \approx \sin(v)$. Dette skyldes, at cos(v) storset er 1, når vinklerne er små.



Figur 4

Da vi ser på små udsving af en snor, hvor amplituden er lille i forhold til længden, vil vinklen v være lille, og det er derfor en god tilnærmelse at sige, at den lodrette kraft er givet ved:

$$F \cdot \sin(v) = F \cdot \tan(v)$$

Da kraften F er parallel med tangenten i punktet, kan vi bruge tangenten til at bestemme tan(v).

Fra den analytiske geometri kender vi sammenhængen mellem en ret linies retningsvinkel og hældningkoefficienten.

$$a = \tan(v)$$

Hvor a altså er hældningskoefficienten af tangenten. Fra differentialregningen ved vi, at hældningen af tangenten er det samme som differentialkvotienten i punktet. Dvs:

$$\tan(v) = a = f'(x_0 + h)$$

Vi kan altså nu skrive den lodrette kraft i endepunktet af snorstykket som:

$$F \cdot f'(x_0 + h)$$

Tilsvarende bliver den lodrette kraft i venstre side af snorstykket:

$$F \cdot f'(x_0)$$

Den resulterende kraft er så forskellen mellem de to lodrette kræfter.

$$F_{res} = F \cdot f'(x_0 + h) - F \cdot f'(x_0) = F \cdot (f'(x_0 + h) - f'(x_0))$$

Vi husker nu, at $F_{res} = m \cdot a$, hvor m er massen af snorstykket og a er nu accelerationen af stykket.

Massen af snorstykket kan vi beregne som:

$$m = \mu \cdot h$$

Da µ var massen af snoren pr længde og h netop er længden af snorstykket.

Vi indsætter dette i F_{res}.

$$\mu \cdot h \cdot a = F(f'(x_0 + h) - f'(x_0))$$

Isolerer a

$$a = \frac{F}{\mu} \cdot \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

Vi genkender den sidste faktor på højre side. Dette er differenskvotienten for $f'(x_0)$. Lader vi h gå mod nul, så får vi at:

$$a = \frac{F}{\mu} \cdot f''(x_0)$$

Accelerationen er altså proportional med den dobbelt afledede af f mht stedet.

Vi ser nu på accelerationen på en anden måde. Vi husker at accelerationen er den dobbeltafledede af stedfunktionen mht tiden, altså $a = s''(t)$. I vores eksempel er det stedfunktion $f(x, t)$, som beskriver det udsving, som snoren laver. Dvs

$$a = f''(t)$$

Og dermed

$$f''(t) = \frac{F}{\mu} \cdot f''(x)$$

(Vi dropper x_0, da sammenhængen gælder for hele snoren)

Newtons 2 lov har altså nu givet os, at en svingende snor skal beskrives ved en funktion af to variable, hvor den dobbelte afledede mht tiden er proportional med den dobbelte afledede mht stedet.

Den korrekte matematiske formulering er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Dette kaldes bølgeligningen.

Snorhastigheden

Vi indsætter nu

$$f(x,t) = A \cdot \sin\,(k \cdot x + \omega \cdot t)$$

i bølgeligningen.

Vi udregner venstre side:

Differentierer første gang.

$$\frac{\partial}{\partial t}(A \cdot \sin(k \cdot x + \omega \cdot t)) = A \cdot \omega \cdot cos\,(k \cdot x + \omega \cdot t)$$

Anden gang

$$\frac{\partial}{\partial t}(A \cdot \omega \cdot \cos(k \cdot x + \omega \cdot t)) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(k \cdot x + \omega \cdot t)$$

Og nu højre side uden konstanten.

$$\frac{\partial}{\partial x}(A \cdot \sin(k \cdot x + \omega \cdot t)) = A \cdot k \cdot \cos(k \cdot x + \omega \cdot t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} A \cdot k \cdot \cos(k \cdot x + \omega \cdot t) = -A \cdot k^2 \cdot \sin(k \cdot x + \omega \cdot t)$$

Begge resultater indsættes i bølgeligningen

$$-A \cdot \omega^2 \cdot \sin(k \cdot x + \omega \cdot t) = \frac{F}{\mu} \cdot (-A) \cdot k^2 \cdot \sin(k \cdot x + \omega \cdot t)$$

Reducerer

$$\omega^2 = \frac{F}{\mu} \cdot k^2$$

Indsætter ω og k

$$\left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 = \frac{F}{\mu} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda}\right)^2$$

Reducerer igen

$$\frac{1}{T^2} = \frac{F}{\mu} \cdot \frac{1}{\lambda^2}$$

Ganger λ^2 over

$$\frac{\lambda^2}{T^2} = \left(\frac{\lambda}{T}\right)^2 = \frac{F}{\mu}$$

Da $v = \frac{\lambda}{T}$ får vi altså

$$v^2 = \frac{F}{\mu}$$

Eller

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Som var det resultat, vi ønskede at finde.